



**UNIVERSITÉ
DE TOULON**

Faculté des Sciences et Techniques

LICENCE DE MATHÉMATIQUES

1ère année

Module M11

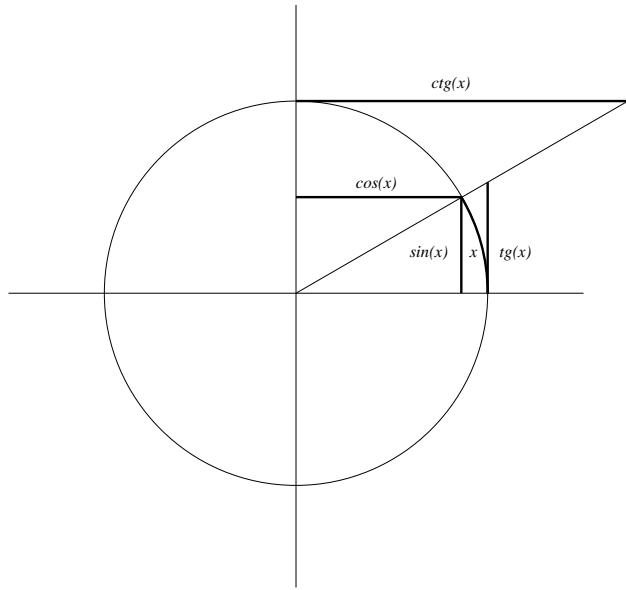
Fonctions Usuelles

C.-A. PILLET

Fonctions Usuelles

1 Fonctions trigonométriques

Définitions



Relations fondamentales

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\begin{aligned}\sin(-x) &= -\sin x \\ \tg(-x) &= -\tg x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(-x) &= \cos x \\ \ctg(-x) &= -\ctg x\end{aligned}$$

$$\tg x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\ctg x}$$

$$\ctg x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tg x}$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} - \tg^2 x = 1$$

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \ctg^2 x = 1$$

Formules de réduction

y	$\frac{\pi}{2} \pm x$	$\pi \pm x$	$\frac{3\pi}{2} \pm x$	$2\pi \pm x$
$\sin y$	$\cos x$	$\mp \sin x$	$-\cos x$	$\pm \sin x$
$\cos y$	$\mp \sin x$	$-\cos x$	$\pm \sin x$	$\cos x$
$\operatorname{tg} y$	$\mp \operatorname{ctgx}$	$\pm \operatorname{tg} x$	$\mp \operatorname{ctgx}$	$\pm \operatorname{tg} x$
ctgy	$\mp \operatorname{tg} x$	$\pm \operatorname{ctgx}$	$\mp \operatorname{tg} x$	$\pm \operatorname{ctgx}$

Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
ctgx	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$

Formules d'addition des angles

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad \operatorname{ctg}(x+y) = \frac{\operatorname{ctgx} \operatorname{ctgy} - 1}{\operatorname{ctgx} + \operatorname{ctgy}}$$

Formules des angles doublés

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad \operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctgx}}$$

Formules de bisection des angles

Le signe (\pm) doit être choisi en fonction du quadrant dans lequel se trouve l'argument x .

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \quad \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$$

Produits de fonctions trigonométriques

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

Sommes de fonctions trigonométriques

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \quad \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \quad \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(x+y)}{\sin x \sin y}$$

Relations entre les fonctions trigonométriques

Le tableau suivant permet d'exprimer les fonctions de la première ligne en terme des fonctions de la première colonne. Le signe (\pm) doit être choisi en fonction du quadrant dans lequel se trouve l'argument x .

	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg}x$	$\operatorname{ctg}x$
\sin	$\sin x$	$\pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$	$\pm \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x}$
\cos	$\pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$	$\cos x$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$	$\pm \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}$
tg	$\pm \frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$	$\operatorname{tg}x$	$\frac{1}{\operatorname{tg}x}$
ctg	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}}$	$\pm \frac{\operatorname{ctg}x}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}}$	$\frac{1}{\operatorname{ctg}x}$	$\operatorname{ctg}x$

Dérivées des fonctions trigonométriques

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x \quad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{tg}x = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \frac{d}{dx} \operatorname{ctg}x = -1 - \operatorname{ctg}^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\frac{d^n}{dx^n} \sin x = \sin \left(x + n \frac{\pi}{2} \right) \quad \frac{d^n}{dx^n} \cos x = \cos \left(x + n \frac{\pi}{2} \right)$$

Primitives des fonctions trigonométriques

$$\int \sin x \, dx = -\cos x \quad \int \cos x \, dx = \sin x$$

$$\int \operatorname{tg}x \, dx = -\ln |\cos x| \quad \int \operatorname{ctg}x \, dx = \ln |\sin x|$$

Développements limités des fonctions trigonométriques

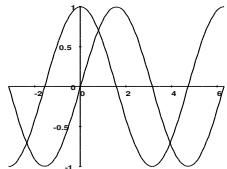
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

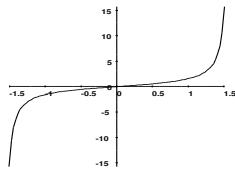
$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \cdots$$

$$x \cdot \operatorname{ctg} x = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 - \frac{2}{945}x^6 - \frac{1}{4725}x^8 - \cdots$$

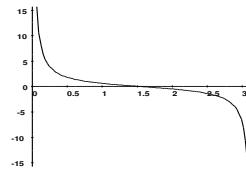
Graphes des fonctions trigonométriques



Les fonctions $\sin x$ et $\cos x$



La fonction $\operatorname{tg} x$



La fonction $\operatorname{ctg} x$

2 Les fonctions trigonométriques réciproques

Définitions

$f(x)$	$\mathcal{D}(f) \rightarrow \mathcal{R}(f)$	Variation	$f^{-1}(x)$	$\mathcal{D}(f^{-1}) \rightarrow \mathcal{R}(f^{-1})$	
$\sin x$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$	\uparrow	$\arcsin x$	$[-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	
$\cos x$	$[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$	\downarrow	$\arccos x$	$[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$	
$\operatorname{tg} x$	$] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [\rightarrow] -\infty, \infty [$	\uparrow	$\operatorname{arctg} x$	$] -\infty, \infty [\rightarrow] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$	
$\operatorname{ctg} x$	$] 0, \pi [\rightarrow] -\infty, \infty [$	\downarrow	$\operatorname{arcctg} x$	$] -\infty, \infty [\rightarrow] 0, \pi [$	

Relations fondamentales

$$\begin{array}{ll}
 (\forall x \in [-1, 1]) & \sin(\arcsin x) = x \\
 (\forall x \in [-1, 1]) & \cos(\arccos x) = x \\
 (\forall x \in]-\infty, \infty[) & \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x \\
 (\forall x \in]-\infty, \infty[) & \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \arcsin(-x) & = & -\arcsin x \\
 \arccos(-x) & = & \pi - \arccos x \\
 \operatorname{arctg}(-x) & = & -\operatorname{arctg} x \\
 \operatorname{arcctg}(-x) & = & \pi - \operatorname{arcctg} x
 \end{array}$$

Relations entre les fonctions trigonométriques réciproques

Le tableau suivant permet d'exprimer les fonctions de la première ligne en terme des fonctions de la première colonne. Les formules entre crochets [...] ne sont valables que pour $x \geq 0$.

	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arcctg} x$
\arcsin	$\arcsin x$	$\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin x \atop \arcsin \sqrt{1-x^2} \right]$	$\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\left[\arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \atop \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right]$
\arccos	$\left[\frac{\pi}{2} - \arccos x \atop \arccos \sqrt{1-x^2} \right]$	$\arccos x$	$\left[\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \atop \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right]$	$\arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
arctg	$\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left[\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \atop \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right]$	$\operatorname{arctg} x$	$\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \atop \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right]$
arcctg	$\left[\operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \atop \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right]$	$\operatorname{arcctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x \atop \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} \right]$	$\operatorname{arcctg} x$

Formules d'addition

$$\begin{aligned}
 \arcsin x + \arcsin y &= \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) && \text{si } xy \leq 0 \text{ ou } x^2 + y^2 \leq 1 \\
 &= \pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) && \text{si } x > 0, y > 0 \text{ et } x^2 + y^2 > 1 \\
 &= -\pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) && \text{si } x < 0, y < 0 \text{ et } x^2 + y^2 > 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \arccos x + \arccos y &= \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) && \text{si } x+y \geq 0 \\
 &= 2\pi - \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) && \text{si } x+y < 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\arctg x + \arctg y &= \arctg \left(\frac{x+y}{1-xy} \right) && \text{si } xy < 1 \\
&= \pi + \arctg \left(\frac{x+y}{1-xy} \right) && \text{si } xy > 1 \text{ et } x > 0 \\
&= -\pi + \arctg \left(\frac{x+y}{1-xy} \right) && \text{si } xy > 1 \text{ et } x < 0
\end{aligned}$$

Dérivées des fonctions trigonométriques réciproques

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \arctg x = \frac{1}{1+x^2} \quad \frac{d}{dx} \arcctg x = -\frac{1}{1+x^2}$$

Développements limités des fonctions trigonométriques réciproques

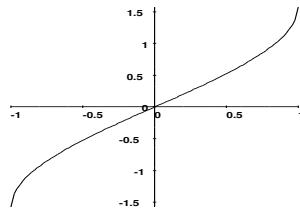
$$\begin{aligned}
\arcsin x &= x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \\
\arccos x &= \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \right) \\
\arctg x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \\
\arcctg x &= \frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \right)
\end{aligned}$$

Primitives des fonctions trigonométriques réciproques

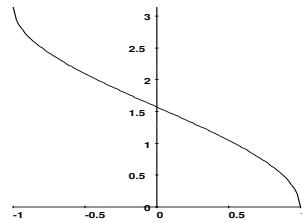
$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \quad \int \arccos x \, dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$$

$$\int \arctg x \, dx = x \arctg x - \log \sqrt{1+x^2} \quad \int \arcctg x \, dx = x \arcctg x + \log \sqrt{1+x^2}$$

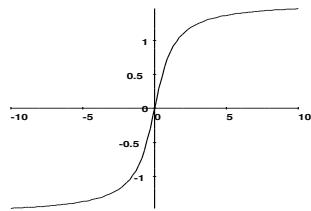
Graphes des fonctions trigonométriques réciproques



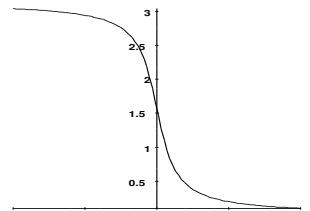
La fonction $\arcsin x$



La fonction $\arccos x$



La fonction \arctgx



La fonction arcctgx

3 Les fonctions $\exp(x)$ et $\log(x)$

Relations fondamentales

La fonction $\exp(x)$ est définie sur \mathbb{R} et prend ses valeurs dans $]0, \infty[$. Sa fonction réciproque $\log(x)$ est définie sur $]0, \infty[$ et prend ses valeurs dans \mathbb{R} .

Équations fonctionnelles :

$$\begin{aligned}\exp(x)\exp(y) &= \exp(x+y) \\ \log(x)+\log(y) &= \log(xy)\end{aligned}$$

Valeurs remarquables

$$\begin{aligned}\exp(0) &= 1 \\ \exp(1) &= e = 2.71828182845904523536\dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log(1) &= 0 \\ \log(e) &= 1 \\ \log(2) &= 0.69314718055\dots \\ \log(10) &= 2.30258509299\dots\end{aligned}$$

Exponentielles et logarithmes généraux

$$\begin{aligned} a^x &= \exp(x \log(a)) \quad \text{pour } a > 0 \\ \log_a(x) &= \frac{\log(x)}{\log(a)} \quad \text{pour } a > 0 \end{aligned}$$

Cas particuliers : $\exp(x) = e^x$ et $\log(x) = \ln(x)$. Equations fonctionnelles :

$$\begin{aligned} a^x a^y &= a^{x+y} & (a^x)^y &= a^{xy} \\ \log_a(xy) &= \log_a(x) + \log_a(y) & \log_a(x^y) &= y \log_a(x) \end{aligned}$$

Dérivées des fonctions exponentielles et logarithmes

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \exp(x) &= \exp(x) & \frac{d}{dx} a^x &= \log(a) a^x \\ \frac{d}{dx} \log(x) &= \frac{1}{x} & \frac{d}{dx} \log_a(x) &= \frac{1}{x \log(a)} \end{aligned}$$

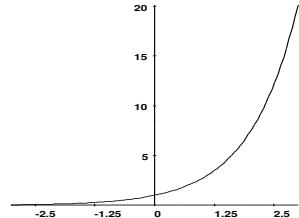
Primitives des fonctions exponentielles et logarithmes

$$\begin{aligned} \int \exp(x) dx &= \exp(x) & \int a^x dx &= \frac{a^x}{\log(a)} \\ \int \log(x) dx &= x \log(x) - x & \int \log_a(x) dx &= x \log_a \left(\frac{x}{e} \right) \end{aligned}$$

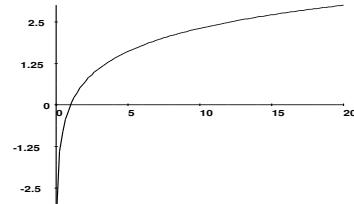
Développements limités

$$\begin{aligned} \exp x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \\ \log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \cdots \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots \end{aligned}$$

Graphes des fonctions $\exp(x)$ et $\log(x)$



La fonction $\exp(x)$



La fonction $\log(x)$

4 Les fonctions hyperboliques

Définitions

$$\operatorname{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{th}x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{cth}x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Relations fondamentales

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}^2x - \operatorname{sh}^2x &= 1 \\ \operatorname{ch}x \pm \operatorname{sh}x &= e^{\pm x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}(-x) &= -\operatorname{sh}x \\ \operatorname{th}(-x) &= -\operatorname{th}x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(-x) &= \operatorname{ch}x \\ \operatorname{cth}(-x) &= -\operatorname{cth}x\end{aligned}$$

$$\operatorname{th}x = \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x} = \frac{1}{\operatorname{cth}x}$$

$$\operatorname{cth}x = \frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x} = \frac{1}{\operatorname{th}x}$$

$$\operatorname{th}^2x + \frac{1}{\operatorname{ch}^2x} = 1$$

$$\operatorname{cth}^2x - \frac{1}{\operatorname{sh}^2x} = 1$$

Valeurs remarquables

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{sh}x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{ch}x$	$+\infty$	1	$+\infty$
$\text{th}x$	-1	0	+1
$\text{cth}x$	-1	$\pm\infty$	+1

Formules d'addition

$$\text{sh}(x+y) = \text{sh}x \text{ch}y + \text{ch}x \text{sh}y \quad \text{th}(x+y) = \frac{\text{th}x + \text{thy}}{1 + \text{th}x \text{thy}}$$

$$\text{ch}(x+y) = \text{ch}x \text{ch}y + \text{sh}x \text{sh}y \quad \text{cth}(x+y) = \frac{1 + \text{cthx cthy}}{\text{cthx} + \text{cthy}}$$

Formules des arguments doublés

$$\text{sh}2x = 2\text{sh}x \text{ch}x \quad \text{th}2x = \frac{2\text{th}x}{1 + \text{th}^2x}$$

$$\text{ch}2x = \text{ch}^2x + \text{sh}^2x \quad \text{cth}2x = \frac{1 + \text{cth}^2x}{2\text{cthx}}$$

Formules des demi-arguments

Le signe (\pm) est celui de l'argument x .

$$\text{sh}\frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{\text{ch}x - 1}{2}} \quad \text{th}\frac{x}{2} = \frac{\text{ch}x - 1}{\text{sh}x} = \frac{\text{sh}x}{\text{ch}x + 1}$$

$$\text{ch}\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\text{ch}x + 1}{2}} \quad \text{cth}\frac{x}{2} = \frac{\text{sh}x}{\text{ch}x - 1} = \frac{\text{ch}x + 1}{\text{sh}x}$$

Produits de fonctions hyperboliques

$$\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y))$$

$$\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y))$$

$$\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y))$$

Sommes de fonctions hyperboliques

$$\operatorname{sh}x + \operatorname{sh}y = 2\operatorname{sh}\frac{x+y}{2}\operatorname{ch}\frac{x-y}{2} \quad \operatorname{th}x + \operatorname{thy} = \frac{\operatorname{sh}(x+y)}{\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y}$$

$$\operatorname{ch}x + \operatorname{ch}y = 2\operatorname{ch}\frac{x+y}{2}\operatorname{ch}\frac{x-y}{2} \quad \operatorname{cth}x + \operatorname{cthy} = \frac{\operatorname{sh}(x+y)}{\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y}$$

Relations entre les fonctions hyperboliques

Le tableau suivant permet d'exprimer les fonctions de la première ligne en terme des fonctions de la première colonne. Le signe (\pm) des racines carrées est celui de l'argument x .

	$\operatorname{sh}x$	$\operatorname{ch}x$	$\operatorname{th}x$	$\operatorname{cth}x$
sh	$\operatorname{sh}x$	$\sqrt{\operatorname{sh}^2x+1}$	$\frac{\operatorname{sh}x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2x+1}}$	$\frac{\sqrt{\operatorname{sh}^2x+1}}{\operatorname{sh}x}$
ch	$\pm\sqrt{\operatorname{ch}^2x-1}$	$\operatorname{ch}x$	$\pm\frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2x-1}}{\operatorname{ch}x}$	$\pm\frac{\operatorname{ch}x}{\sqrt{\operatorname{ch}^2x-1}}$
th	$\frac{\operatorname{th}x}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2x}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2x}}$	$\operatorname{th}x$	$\frac{1}{\operatorname{th}x}$
cth	$\pm\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cth}^2x-1}}$	$\frac{ \operatorname{cth}x }{\sqrt{\operatorname{cth}^2x-1}}$	$\frac{1}{\operatorname{cth}x}$	$\operatorname{cth}x$

Dérivées des fonctions hyperboliques

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sh}x = \operatorname{ch}x$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{ch}x = \operatorname{sh}x$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{th}x = 1 - \operatorname{th}^2x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2x}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{cth}x = 1 - \operatorname{cth}^2x = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2x}$$

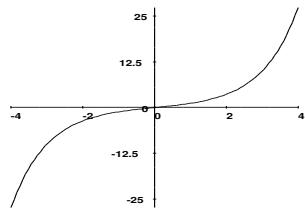
Primitives des fonctions hyperboliques

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sh}x \, dx &= \operatorname{ch}x \\ \int \operatorname{th}x \, dx &= \log(\operatorname{ch}x) \\ \int \operatorname{ch}x \, dx &= \operatorname{sh}x \\ \int \operatorname{cthx} \, dx &= \log|\operatorname{sh}x|\end{aligned}$$

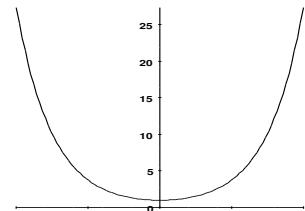
Développements limités des fonctions hyperboliques

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \\ \operatorname{ch}x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \\ \operatorname{th}x &= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \cdots \\ x \cdot \operatorname{cthx} &= 1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 + \frac{2}{945}x^6 - \frac{1}{4725}x^8 + \cdots\end{aligned}$$

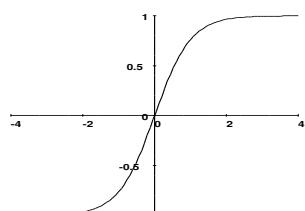
Graphes des fonctions hyperboliques



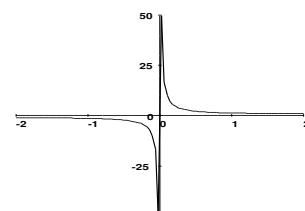
La fonction shx



La fonction chx



La fonction thx



La fonction cthx

5 Les fonctions hyperboliques réciproques

Définitions

$f(x)$	$\mathcal{D}(f) \rightarrow \mathcal{R}(f)$	Variation	$f^{-1}(x)$	$\mathcal{D}(f^{-1}) \rightarrow \mathcal{R}(f^{-1})$
$\text{sh}x$	$] -\infty, \infty [\rightarrow] -\infty, \infty [$	\uparrow	$\text{argsh}x$	$] -\infty, \infty [\rightarrow] -\infty, \infty [$
$\text{ch}x$	$[0, \infty [\rightarrow [1, \infty [$	\uparrow	$\text{argch}x$	$[1, \infty [\rightarrow [0, \infty [$
$\text{th}x$	$] -\infty, \infty [\rightarrow] -1, 1 [$	\uparrow	$\text{argth}x$	$] -1, 1 [\rightarrow] -\infty, \infty [$
$\text{cth}x$	$] 0, \infty [\rightarrow] 1, \infty [$	\downarrow	$\text{argcth}x$	$] 1, \infty [\rightarrow] 0, \infty [$

Relations fondamentales

$$\begin{aligned}
 (\forall x \in]-\infty, \infty[) \quad & \text{sh}(\text{argsh}x) = x \\
 (\forall x \in [1, \infty[) \quad & \text{ch}(\text{argch}x) = x \\
 (\forall x \in]-1, 1[) \quad & \text{th}(\text{argth}x) = x \\
 (\forall x \in]1, \infty[) \quad & \text{cth}(\text{argcth}x) = x
 \end{aligned}$$

$$\text{argsh}(-x) = -\text{argsh}x \qquad \text{argth}(-x) = -\text{argth}x$$

Formules d'addition

$$\begin{aligned}
 \text{argsh}x + \text{argsh}y &= \text{argsh} \left(x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} \right) \\
 \text{argch}x + \text{argch}y &= \text{argch} \left(xy + \sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1} \right) \\
 \text{argth}x + \text{argcthy} &= \text{argth} \frac{x+y}{1+xy}
 \end{aligned}$$

Représentations logarithmiques

$$\begin{aligned}
 \text{argsh}x &= \log \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) & \text{argch}x &= \log \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \\
 \text{argth}x &= \log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} & \text{argcthx} &= \log \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}
 \end{aligned}$$

Dérivées des fonctions hyperboliques réciproques

$$\frac{d}{dx} \operatorname{argshx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \frac{d}{dx} \operatorname{argchx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{argthx} = \frac{1}{1-x^2} \quad \frac{d}{dx} \operatorname{argcthx} = \frac{1}{1-x^2}$$

Primitives des fonctions hyperboliques réciproques

$$\int \operatorname{argshx} dx = x \operatorname{argshx} - \sqrt{1+x^2}$$

$$\int \operatorname{argchx} dx = x \operatorname{argchx} - \sqrt{x^2-1}$$

$$\int \operatorname{argthx} dx = x \operatorname{argthx} + \log \sqrt{1-x^2}$$

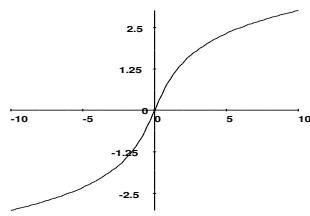
$$\int \operatorname{argcthx} dx = x \operatorname{argcthx} + \log \sqrt{x^2-1}$$

Développements limités des fonctions hyperboliques réciproques

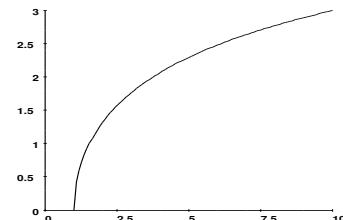
$$\operatorname{argshx} = x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

$$\operatorname{argthx} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

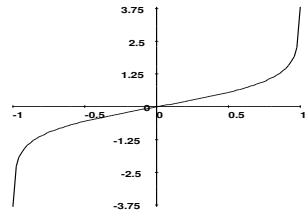
Graphes des fonctions hyperboliques réciproques



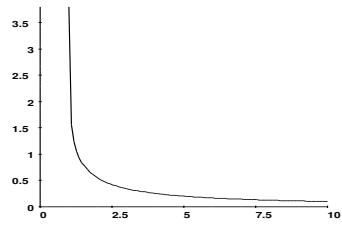
La fonction argshx



La fonction argchx



La fonction $\text{arth}x$



La fonction $\text{argch}x$