UNIVERSITE du SUD TOULON - VAR

Faculté des Sciences et Techniques

Licence 1ére année

M22/M231

Documents autorisés : aucun.
Barème : les points attribués à chaque problème sont notés en marge.
Toutes les réponses doivent être justifiées.

Problème 1. Calculez les primitives suivantes [8]

$$\int \frac{dx}{x^2+3}, \qquad \int \frac{x}{1+x^4}\,dx, \qquad \int \frac{\ln x}{x^2}\,dx, \qquad \int \frac{x^2}{(1-x^2)^2}\,dx.$$

Problème 2. Soit f une fonction deux fois continuement dérivable sur l'intervalle $]-1,1[$.

1. Montrez que pour $x \in]-1,1[$ on a [2]

$$f(x) = f(0) + x\int_0^1 f'(tx)dt.$$

2. A l'aide d'une intégration par partie, en déduire que [2]

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + x^2\int_0^1 f''(tx)(1-t)dt.$$

3. Montrer que si $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in]-1,1[$ alors le graphe de f est situé en dessus de sa tangente en $(0, f(0))$. [2]

Problème 3. Calculez les intégrales suivantes [6]

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{u+1}{u^2+2u+2}\,du, \qquad \int_0^R e^{-x^2} x\,dx, \qquad \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx.$$

(Session 1 – 2008)

Faculté des Sciences et Techniques

Licence 1ère année

M22/M231

Documents autorisés : aucun.
Barème : les points attribués à chaque problème sont notés en marge.
Toutes les réponses doivent être justifiées.

Problème 1. Calculez les primitives suivantes [8]

$$\int \frac{dx}{x^2+5}, \qquad \int \frac{x}{1+x^3}\,dx, \qquad \int \frac{\ln x}{x}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{(1+e^x)^2}.$$

Problème 2. (a) En écrivant

$$\frac{1}{\sin^n x} = \frac{1}{\sin^{n-2} x}\,\frac{1}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^{n-2} x}\,\frac{d}{dx}\operatorname{cotan} x,$$

montrer, à l'aide d'une intégration par partie que

$$I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x},$$

satisfait la relation de récurrence

$$I_n = -\frac{1}{n-1}\,\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\,I_{n-2},$$

pour tout entier $n \geqslant 2$. [3]

(b) En déduire les primitives I_2, I_4 et I_6. [3]

Problème 3. Calculez les intégrales suivantes [6]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{u^2+1}, \qquad \int_0^{\infty} e^{-x}\sin(ax)\,dx.$$

(Session 2 – 2008)

Faculté des Sciences et Techniques

Licence 1ére année

M22

Documents autorisés : aucun.
Barème : les points attribués à chaque problème sont notés en marge.
Toutes les réponses doivent être justifiées.

Problème 1. Pour chacune des fonctions $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ définies ci-dessous, déterminer si il est possible de définir $f(0,0)$ de telle manière que f soit continue en $(x,y)=(0,0)$. Donner la valeur de $f(0,0)$ chaque fois que c'est possible [4]

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{2xy}{x^2+y^2}, \\ f(x,y) &= e^{-1/(x^2+y^2)}. \end{aligned}$$

Problème 2. Soit f la fonction définie par l'expression

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{pour} \quad (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{pour} \quad (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

(a) Montrer que les dérivées partielles de f existent en $(x,y)=(0,0)$ et que [2]

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$$

(b) Calculer les dérivées partielles de f en $(x,y)\neq(0,0)$. [1]

(c) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. [2]

(d) Déterminer l'ensemble des points $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ où f est différentiable. [1]

Problème 3. (a) Déterminer les points critiques de la fonction [3]

$$f(x,y)=(x^2+y^2-y^3)e^{-y}.$$

(b) Déterminer la nature de chaque point critique de f. [3]

(c) Déterminer le minimum de f sur $\mathbb{R}^2$ (Indication : remarquer que $f(x,y)\geqslant f(0,y)$). [3]

Problème 4. Soit $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ la transformation définie par $F(x,y)=(u(x,y),v(x,y))$ où

$$\begin{aligned} u(x,y) &= xy, \\ v(x,y) &= \frac{1}{2}(x^2-y^2). \end{aligned}$$

(a) Calculer la matrice jacobienne de F. [2]

(b) Calculer le jacobien de F. [2]

(Session 1 – 2009/2010)

Faculté des Sciences et Techniques

Licence 1ére année

M22

Documents autorisés : aucun.
Barème : les points attribués à chaque question sont notés en marge.
Toutes les réponses doivent être justifiées.

Problème 1. Soit f la fonction définie par l'expression

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{pour} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pour} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(x,y) \neq (0,0)$. [2]

(b) Déterminer l'expression de f en coordonnées polaires. [2]

(c) f est-elle continue en $(x,y) = (0,0)$? [2]

(d) Les dérivées partielles de f existent-elles en $(x,y) = (0,0)$? [3]

(e) Déterminer l'ensemble des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ où f est différentiable. [3]

Problème 2. (a) Calculer le gradient de la fonction [2]

$$f(x,y) = (x^3 - y^2)e^{-x}.$$

(b) Déterminer les points critiques de f. [2]

(c) Montrer que f admet un maximum local en $(x,y) = (3,0)$. [3]

(d) Représenter schématiquement les courbes de niveau de f au voisinage du point $(x,y) = (3,0)$. [2]

(e) Déterminer le maximum global de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$ (Indication : remarquer que $f(x,y) \leqslant f(x,0)$). [3]

(Session 2 – 2009/2010)