EXAMEN DE MI31-Algébre linèaire. Janvier 2014. Note sur 20.
N.B. : le cours est autorisé.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linèaire dont la matrice $M_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f)$ lorsque on mets sur l'espace de départ et d'arrivé la base canonique $\mathcal{C} = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$, est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit ensuite $\mathcal{B} = \{u_1 = (1,1,0), u_2 = (1,1,1), u_3 = (1,0,1)\}$ une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ associée à f quand on muni l'espace de départ de la base $\mathcal{B}$ et l'espace d'arrivé de la base canonique $\mathcal{C}$.

Exercice 2. Soit $\mathcal{B} = \{u_1 = (1,0,1), u_2 = (0,-1,0), u_3 = (2,0,0)\}$ une base de $\mathbb{R}^3$ et soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie de sorte que

$$f(u_1) = (3,1,2),\ f(u_2) = (0,1,1),\ f(u_3) = (6,4,6)$$

– Exprimer les vecteurs de la base canonique $\mathcal{C}$, $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$, en termes des vecteurs u_1, u_2, u_3.
– Utiliser le point précedent pour déterminer la matrice $M_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f)$ associée à f quand on muni l'espace de départ et d'arrivé de la base canonique $\mathcal{C}$.
– Déterminer base et dimension de l'image de f et du noyau de f.

Exercice 3. Soit $\mathcal{P}_3$ l'espace de polynômes de degré au plus 3 et considérons le sous-ensemble $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}_3$ défini par :

$$\mathcal{V} = \{P(t) \in \mathcal{P}_3; P(0) + P(2) = 0; P(1) = 3P(-1)\}$$

– Montrer que $\mathcal{V}$ est un sous-espace vectoriel.
– Déterminer base et dimension de $\mathcal{V}$.
– Montrer que le polinôme $P(t) = -t^3 + 2t + 2$ est dans $\mathcal{V}$ et trouver les composantes de $P(t)$ dans la base de $\mathcal{V}$ calculée auparavant.

Exercice 4. Soit $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$\mathcal{U} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x + z = 0\}$$

$$\mathcal{V} = \text{Vect}\{(1,-1,0), (1,1,-1)\}$$

– Déterminer base et dimension des sous-espaces $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$.
– Déterminer base et dimension des sous-espaces $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ et $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.

EXAMEN DE MI31-Algébre linèaire. Juillet 2014. Note sur 20.
N.B. : le cours est autorisé.

Exercice 1. Soit $\mathcal{P}_2$ l'espace de polynômes de degré au plus 2 et considérons l'application $f : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ définie par

$$f(P) = (ax+1)P + (bx^2+2)P'$$

Trouver la relation que a et b doivent verifier pour que f soit effectivement une application linèaire de $\mathcal{P}_2$ dans lui même. Déterminer ensuite le rang de f.

Exercice 2. Soit (e_1, e_2, e_3) una base de $\mathbb{R}^3$ et

$$\begin{cases} e_1^{'} &= e_1 + e_2 - e_3 \\ e_2^{'} &= e_1 - e_2 + e_3 \\ e_3^{'} &= -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$

Montrer que $(e_1^{'}, e_2^{'}, e_3^{'})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Soit ensuite f l'application linèaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui même qui, dans la base (e_1, e_2, e_3) est répresentée par la matrice

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Donner la matrice associée à f dans la base $(e_1^{'}, e_2^{'}, e_3^{'})$

Exercice 3. Soit N une matrice carrée telle que $N^4 = 0$. Montrer que $(\mathbf{1} - N)$ est inversible.
(Idée : Calculer $(\mathbf{1} - N)(\mathbf{1} + N + N^2 + N^3)$..)
Calculer, en utilisant le résultat précedent, l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Soit f l'application linèaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui même qui, dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est répresenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 4 & 11 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminer une base du Ker de f et una base de l'image de f.

EXAMEN DE MI31-Algébre linèaire. Janvier 2015. Note sur 20.
N.B. : le cours est autorisé.

Exercice 1. Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4-x & -4 & -4 \\ 2 & -2-x & -4 \\ 3 & -3 & -4-x \end{pmatrix}$$

– Trouver les valeurs de x pour lesquelles $\det A = 0$.
– Dans le cas où $\det A \neq 0$, calculer A^{-1}.

Exercice 2. Soit $\mathcal{M}_{2,2}$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2. Considérons le sousespace vectoriel

$$\mathcal{W} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};\ a+b=c;\ b+c=d;\ c+d=a \right\}$$

Trouver dimension et une base de $\mathcal{W}$.

Exercice 3. Considérons l'application linèaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\begin{cases} x' &= x+y \\ y' &= kx+y+z \\ z' &= kx+y+kz \end{cases}$$

– Déterminer la matrice associée à f dans les bases canoniques.
– Déterminer bases et dimensions de $\mathrm{Ker}(f), \mathrm{Im}(f)$, suivant les valeurs du paramètre k.
– Pour $k=0$ l'image a dimension 3 : trouver une base de l'image et calculer la matrice associée à f dans cette base (mise sur l'espace de depart et d'arrivé).

Exercice 4. Considérons les deux sousespaces de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{U} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x-2y+z=0\}$$

$$\mathcal{V} := \mathrm{Vect}\{(1,0,1),(1,2,1),(1,0,1)\}$$

Déterminer baes et dimensions de :
– $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$.
– $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.
– $\mathcal{U} + \mathcal{V}$.

EXAMEN DE MI31-Algébre linèaire. Juin 2015. Note sur 20.
N.B. : le cours est autorisé.

Exercice 1. Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k-4 \\ 2 & k & 0 \end{pmatrix}$$

– Trouver les valeurs de $k \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la matrice A est inversible et pour des telles valeurs calculer A^{-1}.

Exercice 2. Soit $\mathcal{S}$ le sousensemble de $\mathbb{R}^5$ défini par

$$\mathcal{S} := \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5;\ x_1 - x_2 + 2x_5 = k;\ x_1 + x_3 + kx_4 = 0\}$$

Déterminer les valeurs de k pour lesquelles $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ et en déterminer dimension et une base.

Exercice 3. Soient $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 2, 0)$, $v_3 = (0, 1, 1)$, trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et considérons l'application linèaire $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\begin{cases} L(v_1) = v_2 \\ L(v_2) = v_3 \\ L(v_3) = v_1 \end{cases}$$

– Déterminer la matrice associée à L dans la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$.
– Déterminer la matrice associée à L dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
– Déterminer $\mathrm{Ker}(L)$.

Exercice 4. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des polynômes de $\mathcal{P}_3(t)$ ainsi défini :

$$\mathcal{S} = \{P(t) = a\ t^3 + b\ t^2 + c\ t + d,\ P(0) = 0\},\ a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}_3(t)$ et en calculer dimension et une base.

EXAMEN DE MI31-Algébre linèaire. Janvier 2016. Note sur 20.
N.B. : le cours est autorisé.

Exercice 1. Considerons l'ensemble des polynômes de degré au plus 3, $\mathcal{P}_3(t)$ et l'application linèaire $L : \mathcal{P}_3(t) \to \mathcal{P}_3(t)$ ainsi définie :

$$P(t) \to tP'(t),\ P(t) \in \mathcal{P}_3(t).$$

- Trouver la matrice associée à L quand on muni les espaces de depart et d'arrivé avec la base canonique.
- Calculer bases et dimensions du noyau et de l'image de L.
- Soit V le sousespace de $\mathcal{P}_3(t)$ donné par $V = \{at^2 + bt - b;\ a, b \in \mathbb{R}\}$. Trouver une base de l'image $L(V)$ et un supplementaire de $L(V)$ dans $\mathcal{P}_3(t)$.

Exercice 2. Soit $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application linèaire telle que

$$L(1,1) = (3,-1,0);\ L(-1,1) = (1,0,-1).$$

- Trouver la matrice associée à L quand on muni les espaces de depart et d'arrivé avec leurs bases canoniques respectives.
- Calculer bases et dimensions du noyau et de l'image de L.

Exercice 3. Consideraons dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs suivants :

$$v_1 = (1,3,1,3);\ v_2 = (1,1,1,1);\ v_3 = (1,-1,1,-1)$$

et les sousespaces

$$V = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\};\ W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; x+y+z+t = 0\}.$$

- Trouver bases et dimensions de $V \cap W$ et $V + W$.
- Trouver un supplementaire de $V \cap W$ dans V (attention : dans V pas dans $\mathbb{R}^4$), et un supplementaire de $V \cap W$ dans W (attention : dans W pas dans $\mathbb{R}^4$.)

Exercice 4. Considerons le système linèaire

$$\begin{cases} x + z = 4 \\ 2x + y + 3z = 5 \\ -3x - 3y + (a^2 - 5a)z = a - 8 \end{cases}$$

Déterminer les solutions du système en fonction du paramêtre a.

Exercice 5. Soit W l'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{3,3}$, (3×3) de la forme

$$W = \{A \in \mathcal{M}_{3,3}; A + A^T = \mathbf{0}\},$$

ou A^T dénote la transposée de A et $\mathbf{0}$ la matrice nulle.
- Montrer que W est un sousespace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,3}$.
- Trouver une base de W.
- Calculer le déterminant d'une matrice quelconque dans W.