

Durée de l'examen : 120 minutes.

Documents autorisés : aucun.

Barème : les points attribués à chaque problème sont notés en marge.

Problème 1. Montrer que $f \in Y^X$ est injective si et seulement si

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B),$$

pour tout $A, B \subset X$.

[4]

Problème 2. Soient G un groupe cyclique et $a \in G$ un générateur de G . On suppose que H est un groupe et que $\phi \in \text{Hom}(G, H)$ est surjectif.

1. Montrer que H est un groupe cyclique et que $\phi(a)$ en est un générateur. [4]
2. Montrer que si $b \in G$ est d'ordre fini alors $\omega(\phi(b)) \leq \omega(b)$. [4]
3. Montrer que $\omega(\phi(a)) = \omega(a)$ si et seulement si ϕ est un isomorphisme. [4]

Problème 3. Soit G un groupe fini d'ordre p premier. Montrer que G est cyclique. [4]

Problème 4. Soit $D_3 = \{I, \rho, \rho^2, \sigma, \sigma\rho, \sigma\rho^2\} \subset O(2)$ un groupe diédral où ρ est une rotation d'angle $2\pi/3$ et σ une réflexion. Montrer que $\mathcal{R}_3 = \{I, \rho, \rho^2\}$ est un sous-groupe distingué et que $D_3/\mathcal{R}_3 \simeq \{I, \sigma\}$. (Rappel : $\rho\sigma = \sigma\rho^{-1}$) [4]

(Partiel – 2005)

Durée de l'examen : 120 minutes.

Documents autorisés : aucun.

Barème : les points attribués à chaque problème sont notés en marge.

Problème 1. Montrer que $f \in Y^X$ est bijective si et seulement si, pour tout $A \subset X$, $f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$. [4]

Problème 2. Combien existe-t-il, à l'isomorphisme près, de groupes abéliens d'ordre 12 ? Déterminer leurs structures. [4]

Problème 3. On pose $\alpha = e^{i\pi/4}$ et on définit l'application

$$\Phi : (a_0, a_1, a_2, a_3) \mapsto \sum_{k=0}^3 a_k \alpha^k,$$

de $\mathbb{Q}^4$ dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer que Φ est un morphisme injectif du groupe additif $\mathbb{Q}^4$ dans le groupe additif $\mathbb{C}$. Indication : pour démontrer l'injectivité de Φ montrer que

$$\Phi(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_0 + (a_1 - a_3)/\sqrt{2}) + i(a_2 + (a_1 + a_3)/\sqrt{2}).$$

En utilisant le fait que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ en conclure que $\text{Ker} \Phi = \{(0, 0, 0, 0)\}$. [2]

2. Montrer que

$$K = \{z = \sum_{k=0}^3 a_k \alpha^k \mid a_k \in \mathbb{Q}\},$$

est un groupe pour l'addition. Indication : exploiter le résultat de la question précédente. [1]

3. Montrer que $K^* = K \setminus \{0\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$ pour la multiplication. [2]

Un automorphisme de K est une bijection $\sigma : K \rightarrow K$ telle que

1. $\sigma(\lambda z) = \lambda \sigma(z)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}$ et pour tout $z \in K$.

2. $\sigma(z + w) = \sigma(z) + \sigma(w)$ pour tout $z, w \in K$.

3. $\sigma(zw) = \sigma(z)\sigma(w)$ pour tout $z, w \in K$.

4. Montrer que l'ensemble G des automorphismes de K est un groupe pour la composition des applications. [1]

5. Montrer que si $\sigma \in G$ alors $\sigma(\lambda) = \lambda$ pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}$. En conclure que σ est complètement déterminé par $\sigma(\alpha)$. [2]

6. Montrer que si $\sigma \in G$ alors $\sigma(\alpha)^4 = -1$. En conclure que $\sigma(\alpha) \in \{\alpha, \alpha^3, -\alpha, -\alpha^3\}$. [1]

7. Montrer que si $\beta \in \{\alpha, \alpha^3, -\alpha, -\alpha^3\} \subset K$ alors

$$\sigma_\beta(a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3) = a_0 + a_1\beta + a_2\beta^2 + a_3\beta^3,$$

définit un automorphisme de K . Indication : pour montrer que σ_β est bijective utiliser le résultat de la question 1. [2]

8. Montrer que $G = \{\sigma_\beta \mid \beta \in \{\alpha, \alpha^3, -\alpha, -\alpha^3\}\}$ et que ce groupe est isomorphe au groupe de Klein ($\simeq C_2 \times C_2$). [3]

(Partiel - 2006)

Durée de l'examen : 120 minutes.

Documents autorisés : aucun.

Barème : les points attribués à chaque problème sont notés en marge.

Toutes les réponses doivent être justifiées !

Problème 1. Soit $f \in Y^X$.

(a) Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$ pour tout $A \subset X$. [2]

(b) Montrer que f est injective si et seulement si $A = f^{-1}(f(A))$ pour tout $A \subset X$. [2]

Problème 2. Combien existe-t-il, à l'isomorphisme près, de groupes abéliens d'ordre 15 ? Déterminer leurs structures. [6]

Problème 3. Soit G un groupe cyclique d'ordre 6 et $a \in G$ un générateur.

(a) Déterminer les sous-groupes $H = \langle a^2 \rangle$ et $N = \langle a^3 \rangle$. [2]

(b) Déterminer la table de multiplication du groupe quotient $L = G/N$. [3]

(c) Montrer que l'application $x \mapsto x \cdot N$ est un isomorphisme de H dans L . [3]

(d) Montrer que $G = H \otimes N$. [2]

(Partiel - 2007)