# Faculté des Sciences et Techniques

## Licence de Mathématiques

### Module M63

Durée de l'examen : 180 minutes.
Documents autorisés : aucun.
Barème : les points attribués à chaque problème sont notés en marge.

Toutes les réponses doivent être justifiées !

---

**Problème 1.** Déterminer les singularités des fonctions suivantes, discuter leur nature et calculer leur résidu le cas échéant (sans oublier le point $z = \infty$) : [8]

$$f_1(z) = \frac{\sin z}{z^2}, \quad f_2(z) = \frac{\sin^2 z}{z^2}, \quad f_3(z) = \frac{z}{\sin z}, \quad f_4(z) = \frac{z}{1-z^2}.$$

**Problème 2.** Calculer l'intégrale [6]

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx.$$

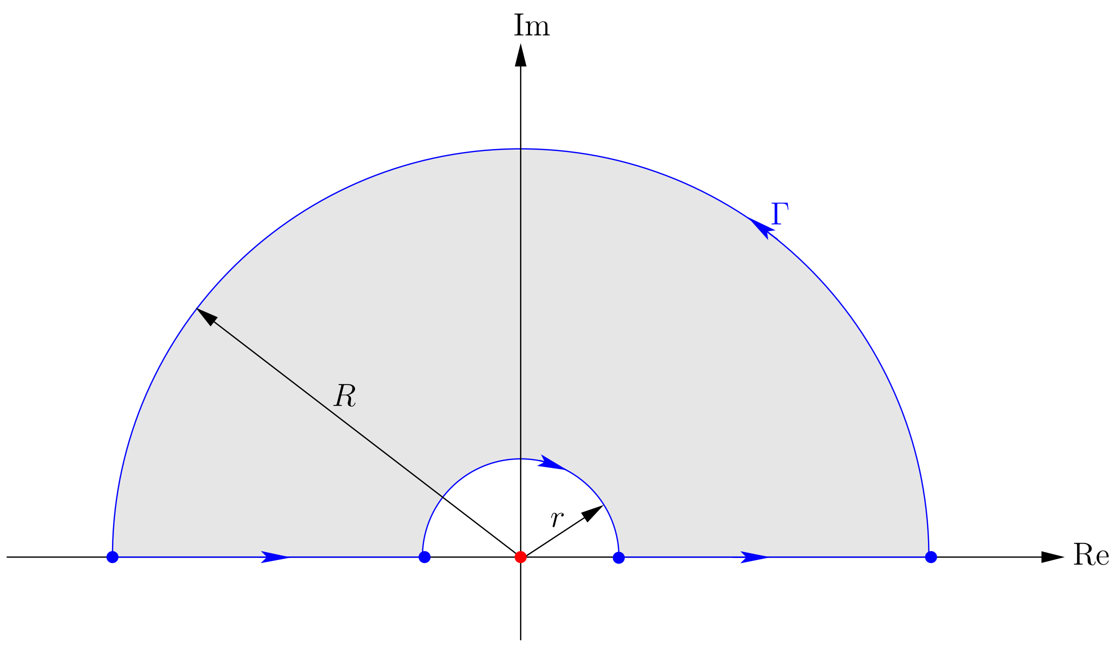
Indications : Utiliser l'identité

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) = \frac{1}{4}(1-e^{2ix}) + \frac{1}{4}(1-e^{-2ix}),$$

et considérer l'intégrale

$$J = \frac{1}{4}\oint_\Gamma \frac{1-e^{2iz}}{z^2}\,dz,$$

sur le contour $\Gamma$ de la figure suivante dans la limite $r \to 0$, $R \to \infty$. Montrer que l'intégrale sur le demi-cercle de rayon $R$ tend vers $0$, que l'intégrale sur les deux segments de l'axe réel tend vers $I$ et évaluer l'intégrale sur le demi-cercle de rayon $r$ dans la limite $r \to 0$.



**Problème 3.** (a) Montrer que la fonction homographique

$$w = \phi(z) = \frac{1+z}{1-z},$$

transforme le disque unité $D = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$ dans le demi-plan $P = \{w \in \mathbb{C} | \mathrm{Re} w > 0\}$. En déduire que la fonction

$$f(z) = \frac{1}{2} \mathrm{Log}\left(\frac{1+z}{1-z}\right),$$

est analytique dans $D$. [2]

(b) Calculer $f'(z)$ et en déduire que [1]

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}.$$

(c) En remarquant que $f(0) = 0$, déterminer le développement de Taylor de $f$ en $z = 0$. [1]

(d) Montrer que pour tout $x \in ]-1, 1[$, on a $f(x) = \mathrm{arth}(x)$. [1]

(e) En déduire le développement de Taylor de la fonction $\arctan(x)$ en $x = 0$. [1]

(Session 1 – 2009/10)

Durée de l'examen : 120 minutes.
Documents autorisés : aucun.
Barème : les points attribués à chaque problème sont notés en marge.

## Toutes les réponses doivent être justifiées !

---

**Problème 1.** Déterminer les singularités des fonctions suivantes, discuter leur nature et calculer leur résidu le cas échéant (sans oublier le point $z=\infty$) : [9]

$$f_1(z) = \frac{1-\cos z}{z^2}, \quad f_2(z) = \frac{z}{1-e^{-z}}, \quad f_3(z) = \frac{z}{z^3-1}.$$

**Problème 2.** Calculer l'intégrale [6]

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{a+\sin^2 x}\,dx,$$

pour $|a|>1$ en utilisant le théorème des résidus.

**Problème 3.** (Lemme de Schwarz) Soit $f$ analytique dans le disque unité $D=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$ et telle que $|f(z)|\leqslant 1$ sur $D$ et $f(0)=0$. Montrer que $|f(z)|\leqslant |z|$ pour tout $z\in D$. [6]

Indication : appliquer le principe du maximum à la fonction

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z} & \text{si } z\in D\setminus\{0\}, \\ f'(0) & \text{si } z=0, \end{cases}$$

sur le disque $\overline{D_r}=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|\leqslant r\}$ et considérer $r\to 1$.

(Session 2 – 2009/10)

Durée de l'examen : 180 minutes.
Documents autorisés : aucun.
Barème : les points attribués à chaque problème sont notés en marge.

## Toutes les réponses doivent être justifiées !

**Problème 1.** Pour chacune des expressions suivantes, déterminer les valeurs des constantes réelles $a, b, c, d$ pour lesquelles $w = f(x+iy)$ définit une fonction analytique de $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, [4]

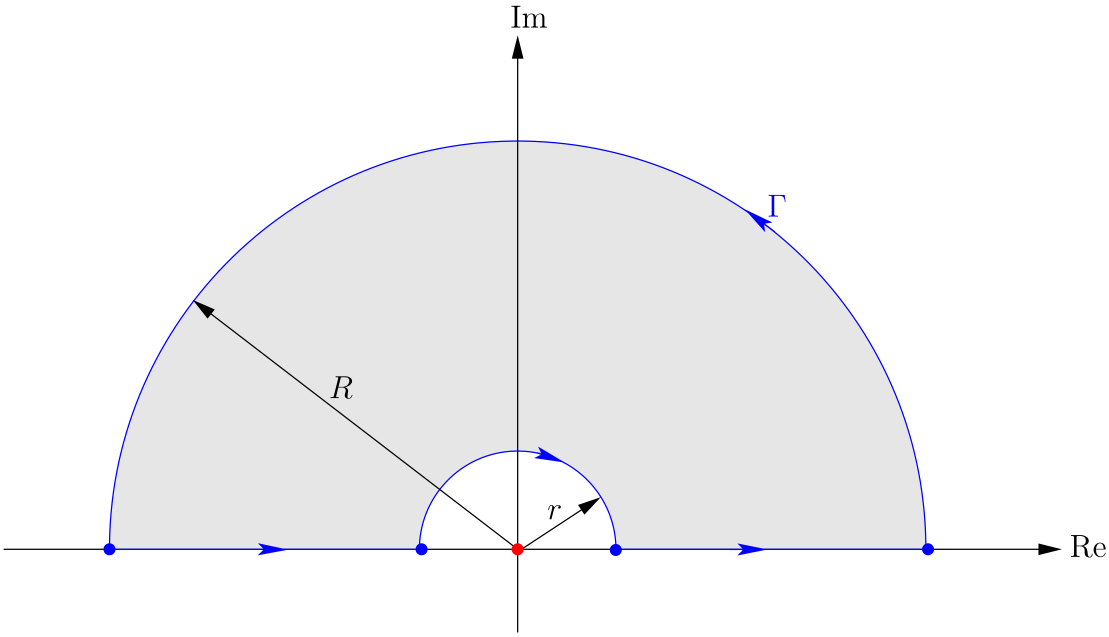
$$\begin{aligned} w &= x + ay + i(bx + cy), \\ w &= x^2 + axy + by^2 + i(cx^2 + dxy + y^2). \end{aligned}$$

**Problème 2.** Déterminer les singularités des fonctions suivantes, discuter leur nature et calculer leur résidu le cas échéant (sans oublier le point $z = \infty$) : [6]

$$f_1(z) = \frac{\sin z}{z}, \quad f_2(z) = \frac{1}{1+e^z}, \quad f_3(z) = \frac{1}{1+z+z^2}.$$

**Problème 3.** (a) A l'aide du théorème des résidus, montrer que si $\Gamma$ est le contour de la figure ci-dessous et $0 < r < 1 < R$, alors pour tout $k \in \mathbb{C}$, [3]

$$\oint_\Gamma \frac{z^k}{1+z^2} dz = \pi e^{ik\pi/2}. \tag{1}$$




Remarque : on définit $z^k = e^{k\mathrm{Log}(z)}$ où Log est la branche principale du logarithme.

Dans le suite, on décompose l'intégrale (1) en 4 parties : l'intégrale sur le demi-cercle de rayon $r$, celle sur le demi-cercle de rayon $R$ et celles sur les intervalles réels $[-R,-r]$ et $[r,R]$.

(b) Montrer que si $\mathrm{Re}(k) > -1$, l'intégrale sur le demi-cercle de rayon $r$ tend vers $0$ lorsque $r \to 0$. [1]

(c) Montrer que si $\mathrm{Re}(k) < 1$, l'intégrale sur le demi-cercle de rayon $R$ tend vers $0$ lorsque $R \to \infty$. [1]

(d) On dénote par $I_-$ l'intégrale sur le segment $[-R,-r]$ et par $I_+$ celle sur le segment $[r,R]$. Montrer que $I_- = e^{ik\pi} I_+$. [1]

(e) Déduire de ce qui précède que pour $\mathrm{Re}(k) \in ]-1,1[$, [2]

$$\lim_{r\to 0,\, R\to\infty} I_+ = \int_0^\infty \frac{t^k}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\cos(k\pi/2)}. \tag{2}$$

**Problème 4.** On se souviendra que la fonction Gamma d'Euler est définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\,dt, \tag{3}$$

pour $\mathrm{Re}(z) > 0$ et qu'elle admet une extension méromorphe à $\mathbb{C}$ dont les pôles se situent aux entiers non positifs $z = 0, -1, -2, \ldots$

(a) Montrer que pour $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$, on a [1]

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = 4\int_0^\infty\int_0^\infty \left(\frac{x}{y}\right)^{2z-1} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy. \tag{4}$$

Indications : utiliser 2 fois la formule (3) en y effectuant la première fois le changement de variable $t = x^2$ et la seconde fois $t = y^2$.

(b) En passant en coordonnées polaires dans la double intégrale (4), montrer que pour $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$, [2]

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = 2\int_0^{\pi/2} \mathrm{ctg}(\varphi)^{2z-1}\,d\varphi.$$

(c) En effectuant le changement de variable $u = \mathrm{ctg}(\varphi)$, en déduire que

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = 2\int_0^\infty \frac{u^{2z-1}}{1+u^2}\,du,$$

pour $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$. [1]

(d) Utiliser la formule (2) pour obtenir [2]

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Expliquer pourquoi la formule précédente est vraie pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$.

(Session 1 – 2010/11)

Durée de l'examen : 120 minutes.
Documents autorisés : aucun.
Barème : les points attribués à chaque problème sont notés en marge.

## Toutes les réponses doivent être justifiées !

---

**Problème 1.** Déterminer les singularités des fonctions suivantes, discuter leur nature et calculer leur résidu le cas échéant (sans oublier le point $z = \infty$) : [6]

$$f_1(z) = \frac{1-\cos^2 z}{z^2}, \quad f_2(z) = \frac{z}{1-e^z}, \quad f_3(z) = \frac{1}{1-z+z^2}.$$

**Problème 2.** On considère la fonction définie, pour $\operatorname{Im} z > 0$, par l'intégrale

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\cos(k) - z}\, dk. \tag{1}$$

(a) Montrer que $f$ est analytique dans le demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$. [3]

(b) A l'aide du changement de variable $w = e^{ik}$, montrer que

$$f(z) = \oint_\Gamma \frac{1}{w^2 - 2zw + 1}\,\frac{dw}{i\pi},$$

où $\Gamma$ désigne le cercle unité parcouru positivement. [4]

(c) Evaluer l'intégrale précédente par la méthode des résidus pour $\operatorname{Im} z > 0$. (Indication : poser $z = \cosh(\chi + i\theta) = \cosh(\chi)\cos(\theta) + i\sinh(\chi)\sin(\theta)$ avec $\chi > 0$ et $\theta \in ]0, \pi[$). [6]

(d) Montrer que $f$ admet un prolongement analytique au domaine $\{z \mid |z| > 1\}$ donné par

$$f(z) = -\frac{1}{z\sqrt{1-z^{-2}}}.$$

Discuter les singularités de cette fonction. [4]

(Session 2 – 2010/11)

Durée de l'examen : 180 minutes.
Documents autorisés : aucun.
Barème : les points attribués à chaque problème sont notés en marge.

Toutes les réponses doivent être justifiées !

---

**Problème 1.** Pour chacune des expressions suivantes, déterminer les valeurs des constantes réelles $a, b, c, d$ pour lesquelles $w = f(x+iy)$ définit une fonction analytique de $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, [4]

$$\begin{aligned} w &= ae^{bx} + ce^{dy}, \\ w &= ae^{bx+cy}. \end{aligned}$$

**Problème 2.** Déterminer les singularités des fonctions suivantes, discuter leur nature et calculer leur résidu le cas échéant (sans oublier le point $z = \infty$) : [6]

$$f_1(z) = \frac{\sin^2 z}{z}, \quad f_2(z) = \frac{1}{1+e^z}, \quad f_3(z) = \frac{\operatorname{sh}(\pi z)}{1+z^2}.$$

**Problème 3.** (a) A l'aide tu théorème des résidus, démontrer que pour $a > 0$ on a l'identité [3]

$$I(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{dx}{a+\cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{a(a+1)}}.$$

(b) Montrer que la fonction $a \mapsto I(a)$ admet un prolongement analytique au plan coupé $\mathbb{C} \setminus [-1,0]$. [3]

(c) Calculer $J(a) = \lim_{\epsilon\downarrow 0}(I(a+i\epsilon) - I(a-i\epsilon))$ pour $a \in ]-1,0[$ et montrer que [3]

$$J(a) = -\frac{2i}{\sqrt{-a(a+1)}}.$$

(d) Déterminer le développement de Laurent de $I(z)$ dans la couronne $|z| > 1$. Indication : remarquer que [3]

$$\frac{1}{a+\cos^2 x} = \frac{1}{a}\frac{1}{1+\frac{\cos^2 x}{a}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos^{2n}(x)}{a^{n+1}}.$$

**UNIVERSITÉ DE TOULON**
Faculté des Sciences et Techniques

# Licence 3ème année

*Module M65*

Durée de l'examen : 180 minutes.
Documents autorisés : aucun.
Barème : les points attribués à chaque problème sont notés en marge.

## Toutes les réponses doivent être justifiées !

---

**Problème 1.** Déterminer tous les polynômes $P$ et $Q$ à coefficients complexes tels que l'expression $w = f(x+iy) = P(x) + iQ(y)$ définisse une fonction analytique de $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. [2]

**Problème 2.** Déterminer les singularités des fonctions suivantes, discuter leur nature et calculer le résidu de chaque singularité isolée ($\sqrt{\cdot}$ dénote la branche principale de la racine carrée). [4]

$$f_1(z) = \frac{1+z^2}{\sin(\pi z)}, \quad f_2(z) = \sqrt{z(1-z)}.$$

**Problème 3.** Déterminer les développements de Taylor/Laurent de la fonction

$$f(z) = \frac{z^2-1}{(z+2)(z+3)}$$

sur les domaines $|z| < 2$, $2 < |z| < 3$ et $|z| > 3$. [6]

**Problème 4.** La transformée de Borel de la série

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

est la série définie par

$$(\mathcal{B}f)(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{w^n}{n!}.$$

(1) Montrer que si $f$ a un rayon de convergence $\rho > 0$ alors sa transformée de Borel est une fonction entière et que pour tout $0 < r < \rho$ il existe une constante $C_r$ telle que

$$|(\mathcal{B}f)(w)| \leqslant C_r e^{|w|/r}$$

pour tout $w \in \mathbb{C}$ (utiliser l'estimation de Cauchy de $a_n$ !). [2]

(2) En déduire que pour $|z| < \rho$ on a la formule d'inversion

$$f(z) = \int_0^{\infty} (\mathcal{B}f)(tz) e^{-t} dt = \frac{1}{z} \int_0^{\infty} (\mathcal{B}f)(t) e^{-t/z} dt.$$

L'intérêt de cette dernière formule est que si la fonction $t \mapsto (\mathcal{B}f)(t)$ ne croît pas trop vite sur l'axe réel lorsque $t \to +\infty$, elle fournit une continuation analytique de $f$. [2]

(3) Comme exemple, considérer la fonction

$$f_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{a+n}, \qquad (\mathrm{Re}(a) > 0)$$

qui est analytique dans le disque unité (rayon de convergence $\rho = 1$). Montrer que sa transformée de Borel est donnée par [2]

$$(\mathcal{B}f_a)(w) = \int_0^1 s^{a-1} e^{-sw} ds.$$

(4) Montrer que

$$f_a(z) = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+tz} dt$$

et en déduire que $f_a$ admet une continuation analytique au plan coupé $\mathbb{C} \backslash ]-\infty, -1]$. [2]

(Session 1 – 2016/17)

UNIVERSITÉ DE TOULON
Faculté des Sciences et Techniques

## Licence 3ème année

*Module M65*

Durée de l'examen : 180 minutes.
Documents autorisés : aucun.
Barème : les points attribués à chaque problème sont notés en marge.

### Toutes les réponses doivent être justifiées !

---

**Problème 1.** Déterminer toutes les fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, telles que l'expression $w = F(x+iy) = f(x) + ig(y)$ définisse une fonction analytique de $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. [3]

**Problème 2.** Déterminer les singularités des fonctions suivantes, discuter leur nature et calculer le résidu de chaque singularité isolée. [6]

$$f_1(z) = \frac{1+z^2}{\sinh(\pi z)}, \quad f_2(z) = \frac{\sin(z)}{z^2}.$$

**Problème 3.** (a) Montrer que l'expression

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}$$

définit une fonction analytique dans le disque unité $D = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$. [3]

(b) Montrer que le développement de $f$ en $z = 0$ est donné par

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n$$

où $A_n$ est le nombre de diviseurs de $n$. [3]

**Problème 4.** Calculer l'intégrale

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{1+\omega^2} d\omega$$

pour $t \in \mathbb{R}$ à l'aide du théorème des résidus. La fonction $f$ est-elle différentiable sur $\mathbb{R}$ ? [5]

(Session 2 – 2016/17)

Durée de l'examen : 180 minutes.
Documents autorisés : notes de cours.
Barème : les points attribués à chaque problème sont notés en marge.

## Toutes les réponses doivent être justifiées !

---

**Problème 1.** Déterminer les singularités des fonctions suivantes, discuter leur nature et calculer le résidu de chaque singularité isolée. [8]

$$f_1(z) = \frac{z}{\sin(z)}, \quad f_2(z) = \frac{1-\cos(z)}{z^2}, \quad f_3(z) = e^{i/z}, \quad f_4(z) = \frac{1}{1-e^z}.$$

**Problème 2.** Déterminer les développements de Taylor/Laurent de la fonction

$$f(z) = \frac{z}{z^2+1}$$

sur les domaines $|z| < 1$ et $|z| > 1$. [6]

**Problème 3.** Calculer l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx.$$

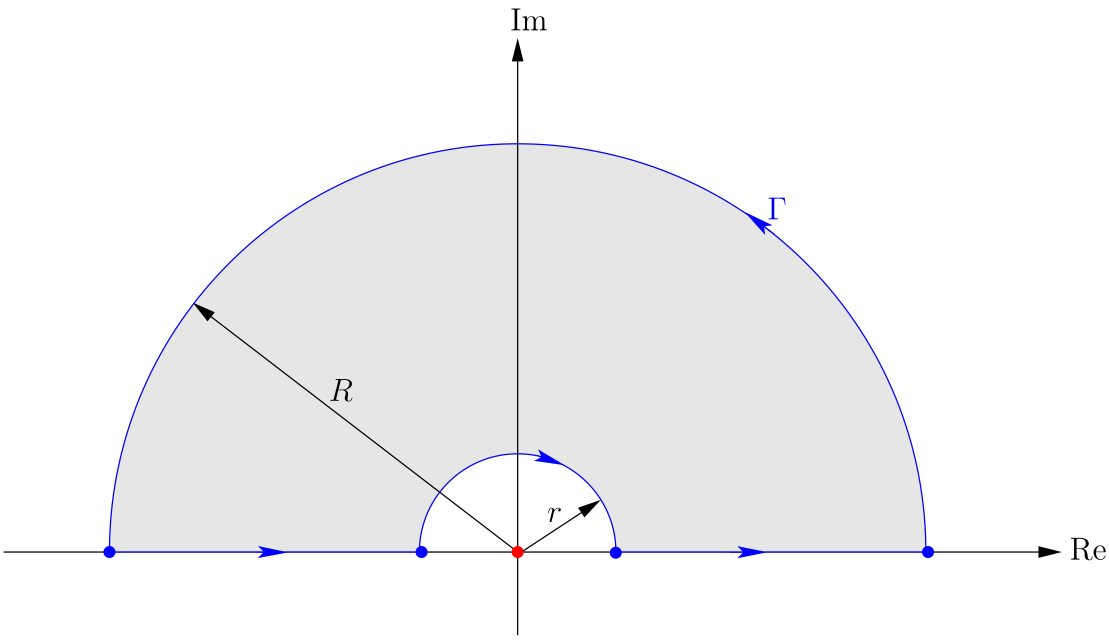
Indications : Utiliser l'identité

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x)) = \frac{1}{4}(1-e^{2ix}) + \frac{1}{4}(1-e^{-2ix}),$$

et considérer l'intégrale

$$J = \frac{1}{4}\oint_\Gamma \frac{1-e^{2iz}}{z^2} dz$$

sur le contour $\Gamma$ de la figure suivante. [6]




(Session 1 – 2017/18)