UNIVERSITÉ DE TOULON
Faculté des Sciences et Techniques

Licence de Mathématiques

1ére année

Module M21

Développements Limités

C.-A. Pillet

1 Polynômes de Taylor

Rappel de la formule de Taylor pour un polynôme qui permet de montrer le

Théorème. *Soit* f *une fonction* m *fois dérivable en* x_0. *Il existe un et un seul polynôme* P, *de degré inférieur ou égal à* m, *tel que* $P^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0)$ *pour* $j = 0, \cdots, m$. *Ce polynôme est donné par la formule*

$$[f]_{x_0,m}(x) \equiv \sum_{j=0}^{m} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j.$$

Remarque. Pour tout $j > m$ on a

$$\frac{d^j}{dx^j}[f]_{x_0,m} = 0.$$

Exemples.

1. Si P est un polynôme de degré N, alors $P(x) = [P]_{x_0,m}(x)$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $m \geqslant N$.
2. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) = (1-x)^\alpha$ en $x_0 = 0$.
3. $\sin(x)$, $\cos(x)$ et $\exp(x)$ en $x_0 = 0$.
4. $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$ et $\ln(1+x)$ en $x_0 = 0$.

2 Formules de Taylor, version qualitative

Soit $R(x) \equiv f(x) - [f]_{x_0,m}(x)$. Si f est m fois dérivable en x_0, alors R l'est aussi et $R^{(j)}(x_0) = 0$ pour $j = 0, \cdots, m$. En appliquant $m-1$ fois le théorème de Lagrange et une fois la définition de la dérivée on obtient le :

Théorème. *Soit* f *une fonction* $m-1$ *fois continuement dérivable sur l'intervalle* $[a, b]$ *et admettant une dérivée d'ordre* m *en* $x_0 \in]a, b[$. *Alors il existe une fonction* ϵ *telle que* $\lim_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0$ *et*

$$f(x) = [f]_{x_0,m}(x) + (x - x_0)^m \epsilon(x).$$

Exemple.

Soit $f(x) = (1-x)^{-1}$ et $x_0 = 0$, alors

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m} x^j + x^m \cdot \frac{x}{1-x}.$$

3 Formules de Taylor, version quantitative

Théorème. *Soit* f *une fonction* m *fois continuement dérivable sur* $[x_0, x]$ *et admettant une dérivée d'ordre* $m+1$ *en tout point de* $]x_0, x[$. *Alors il existe un point* $\xi, \in]x_0, x[$ *tel que*

$$f(x) = [f]_{x_0,m}(x) + \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x - x_0)^{m+1}.$$

Exemple.

Estimation de l'erreur dans les développements limités de sin, cos et exp.

4 Equivalence et indéterminations

Principe de l'utilisation des développements limités pour lever les indéterminations.

Notation. On écrit $f \sim g$ $(x \to x_0)$ si $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = 1$. C'est une relation d'équivalence. (Est-ce vraiment utile ? A mon avis $O(\cdot)$ et $o(\cdot)$ le sont plus).

Exemples.

1. $\sin(x) \sim x$ $(x \to 0)$.
2. $\cosh(x) \sim \sinh(x)$ $(x \to +\infty)$.
3. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(ax)}{1-\cos(bx)}$.
4. $\lim_{x\to 0}(x^3 - 5x^2 + 1)^{1/3} - x$.

5 Asymptotes ?

Si ça n'a pas été fait au chapitre précédent :

1. Asymptote verticale $x = x_0$: $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$.
2. Asymptote horizontale $y = a$: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a$.
3. Asymptote oblique $y = ax + b$: $a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $b = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ax$.

Exemples.

1. $f(x) = x\ln(e + 1/x)$.
2. $f(x) = \exp(1/x) - 1$.
3. $f(x) = (x^2 + 2x - 1)/x$.

6 Points critiques

Stratégie pour la détermination du maximum (minimum) absolu d'une fonction différentiable sur un intervalle fermé $[a, b]$.

Théorème. *Soit* x_0 *un point critique de la fonction* f *tel que*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(m-1)}(x_0) = 0,$$

mais $f^{(m)}(x_0) \neq 0$. *Alors* f *admet en* x_0 *:*

1. *Un maximum local si* m *est pair et* $f^{(m)}(x_0) < 0$.
2. *Un minimum local si* m *est pair et* $f^{(m)}(x_0) > 0$.
3. *Un point d'inflexion si* m *est impair.*

Remarque. En pratique, il est souvent plus simple d'étudier le signe de $f'(x)$ près de x_0.

Exemples.

1. $f(x) = x - \sin(x)$ et $g(x) = f(x^2)$ sur $[-\pi, \pi]$.
2. $f(x) = (1 - x^2)\exp(x)$, sur $[0, 1]$.

7 Fonctions implicites, résolution d'équations

Calcul des polynômes de Taylor de la fonction réciproque $g \equiv f^{-1}$ par différenciation de l'équation $y = f(g(y))$.

Principe d'utilisation des développements limités pour la résolution d'équations du type

$$f(x, \eta) = 0.$$

Exemple.

L'équation de Kepler :

$$x = 1 + \eta \sin(x),$$

définit une fonction $x = u(\eta)$ telle que $u(0) = 1$. Déterminer le développement de $u(\eta)$ au troisième ordre en $\eta = 0$.

On obtient

$$u(\eta) = 1 + \eta \sin(1) + \frac{\eta^2}{2} \sin(2) + \frac{\eta^3}{24}(9 \sin(3) - 3 \sin(1)) + \eta^4 \epsilon(\eta),$$

où $\lim_{\eta \to 0} \epsilon(\eta) = 0$.