Caractérisations de l'existence de $\lim_{x\to a} f(x) = l$

$a \backslash l$	$-\infty$	fini	$+\infty$
$-\infty$	$(\forall A \in \mathbb{R})\,(\exists R \in \mathbb{R})\,\text{t.q.}\,(\forall x \in \mathcal{D}(f))$ $(x < R \Rightarrow f(x) < A)$	$(\forall \epsilon > 0)\,(\exists R \in \mathbb{R})\,\text{t.q.}\,(\forall x \in \mathcal{D}(f))$ $(x < R \Rightarrow \lvert f(x) - l\rvert < \epsilon)$	$(\forall A \in \mathbb{R})\,(\exists R \in \mathbb{R})\,\text{t.q.}\,(\forall x \in \mathcal{D}(f))$ $(x < R \Rightarrow f(x) > A)$
fini	$(\forall A \in \mathbb{R})\,(\exists \delta > 0)\,\text{t.q.}\,(\forall x \in \mathcal{D}(f))$ $(\lvert x - a\rvert < \delta \Rightarrow f(x) < A)$	$(\forall \epsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,\text{t.q.}\,(\forall x \in \mathcal{D}(f))$ $(\lvert x - a\rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) - l\rvert < \epsilon)$	$(\forall A \in \mathbb{R})\,(\exists \delta > 0)\,\text{t.q.}\,(\forall x \in \mathcal{D}(f))$ $(\lvert x - a\rvert < \delta \Rightarrow f(x) > A)$
$+\infty$	$(\forall A \in \mathbb{R})\,(\exists R \in \mathbb{R})\,\text{t.q.}\,(\forall x \in \mathcal{D}(f))$ $(x > R \Rightarrow f(x) < A)$	$(\forall \epsilon > 0)\,(\exists R \in \mathbb{R})\,\text{t.q.}\,(\forall x \in \mathcal{D}(f))$ $(x > R \Rightarrow \lvert f(x) - l\rvert < \epsilon)$	$(\forall A \in \mathbb{R})\,(\exists R \in \mathbb{R})\,\text{t.q.}\,(\forall x \in \mathcal{D}(f))$ $(x > R \Rightarrow f(x) > A)$

Remarques

1. Pour les limites à gauche $\lim_{x\to a^-} f(x) = l$, il suffit de remplacer $(\forall x \in \mathcal{D}(f))$ par $(\forall x \in \mathcal{D}(f), x < a)$. Le cas $a = -\infty$ est alors exclu.
2. Pour les limites à droite $\lim_{x\to a^+} f(x) = l$, il suffit de remplacer $(\forall x \in \mathcal{D}(f))$ par $(\forall x \in \mathcal{D}(f), x > a)$. Le cas $a = +\infty$ est alors exclu.

La Garde, le 28 novembre 2009.