UNIVERSITE DU SUD TOULON - VAR

Faculté des Sciences et Techniques

Licence 1ére année

Module M11

Problème principal. Soit f la fonction définie sur le domaine $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ par la formule

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{pour} \quad x \neq 0, \\ 1 & \text{pour} \quad x = 0. \end{cases}$$

1.a Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

1.b Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée f'.

1.c Déterminer les asymptotes de f.

1.d Montrer que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2.a Montrer que la fonction e^{-x} est convexe, et calculer l'équation de la tangente à son graphe au point $(0, 1)$. En conclure que l'inégalité

$$e^{-x} \geqslant 1 - x,$$

est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2.b A l'aide de l'inégalité précédente, montrer que f est monotone décroissante sur $\mathbb{R}$.

2.c Tracer le graphe de f.

Problème supplémentaire. Soit f la fonction définie sur le domaine $\mathcal{D}(f) = [0, \infty[$ par la formule

$$f(x) = \begin{cases} -x \log x & \text{pour} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{pour} \quad x = 0. \end{cases}$$

1.a Montrer que f est continue sur $\mathcal{D}(f)$.

1.b Montrer que f est concave.

1.c Montrer que $f(x) > 0$ pour tout $x \in]0, 1[$.

1.d Calculer la valeur maximale de $f(x)$ pour $x \in [0, 1]$.

(Partiel – 1998)

UNIVERSITE DU SUD TOULON - VAR

Faculté des Sciences et Techniques

Licence 1ére année

Module M11

Avertissement. La qualité des explications sera prise en compte dans la notation. Aucun document ni calculette ne sont autorisés.

Exercice 1. (7 points) Soit P le polynôme : $P(X) = X^3 - 3X + b$ où b est un nombre réel donné.

(1) Déterminer pour quelle valeurs de b le polynôme P admet une racine double. Soit $X_1(b)$ cette racine; la calculer pour toutes les valeurs trouvées de b.

(2) Montrer que si P admet une racine double, il admet nécessairement une autre racine réelle $X_2(b)$ que l'on calculera.

(3) On note f le polynôme P correspondant à $b = 3$ et $(u_n)_n$ la suite définie par $u_1 = 5/4$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

(a) Former le tableau de variation de f et en déduire par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} < u_n.$$

(b) Démontrer que la suite $(u_n)_n$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 2. (7 points) Soit f la fonction définie sur le domaine $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ par la formule

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{pour} \quad x \neq 0, \\ 1 & \text{pour} \quad x = 0. \end{cases}$$

(1) Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer sa dérivée.

(2) Démontrer l'inégalité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{-x} \geqslant 1 - x.$$

En conclure que f est monotone décroissante sur $\mathbb{R}$.

(3) Déterminer les asymptotes de la courbe représentative de f et préciser la position de cette courbe par rapport aux asymptotes. Tracer le graphe de f.

Exercice 3. (6 points) Toutes les questions de cet exercice sont indépendantes. Tous les calculs doivent être justifiés et détaillés. On rappelle qu'une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \to (1 + x^2)^{-1/2}$ est $x \to \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ et que $\sqrt{3} > 1.73$.

(a) Expliquer pourquoi l'intégrale suivante est bien définie puis la calculer :

$$\int_0^1 x(\operatorname{Arctg}(x))^2 dx.$$

(b) Soit $r \geqslant 0$ et $a > 0$ deux nombres réels. Expliquer pourquoi l'intégrale suivante :

$$\int_0^a \frac{x^r}{\sqrt{x^3 + a^3}} dx$$

est bien définie puis démontrer que pour $r = 1/2$ elle ne dépend pas de a. La calculer dans ce cas. On pourra penser à utiliser des changements de variable.

(c) Pour quelle raison l'intégrale suivante existe :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(3 + 2\cos(x))^2} \ ?$$

Donner un encadrement de sa valeur au $100^{\text{ème}}$ près. On pourra remarquer que : $1/2 < \pi/6$.

(Session 1 – 1997)

UNIVERSITE DU SUD TOULON - VAR

Faculté des Sciences et Techniques

Licence 1ére année

Module M11

Avertissement. La qualité des explications sera prise en compte dans la notation. Aucun document ni calculette ne sont autorisés.

Exercice 1. (7 points) Soit P le polynôme $P(X) := 2X^3 - 9X^2 + 12X + b$ où b est un nombre réel donné.

(a) Déterminer pour quelle valeur de b le polynôme P admet une racine double.

(b) Montrer que si P admet une racine double $X_1(b)$ il admet nécessairement une autre racine réelle $X_2(b)$. Calculer $X_2(b)$ pour les valeurs de b trouvées dans la question (a).

(c) Former le tableau de variation de la fonction $x \to P(x)$ pour les valeurs de b trouvées dans la question (a).

(d) Montrer que, quelle que soit la valeur de b, l'équation $P(x) = x$ admet toujours au moins une solution réelle.

Exercice 2. (3 points) On considère l'expression suivante, dans laquelle A et B sont des paramètres réels :

$$f(n) = An + B.$$

(a) Déterminer toutes les valeurs de A et B pour lesquelles cette expression définit une application :

$$f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}.$$

(b) Pour quelles valeurs de A et B l'application $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ est-elle injective ?

(c) Pour quelles valeurs de A et B l'application $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ est-elle surjective ?

(d) Pour quelles valeurs de A et B l'application $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ est-elle bijective ? Déterminer dans ces cas l'application réciproque f^{-1}.

Exercice 3. (5 points) Soit $f\colon [0, \infty[\to \mathbb{R}$, la fonction définie par l'expression suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad x = 0, \\ x \ln x & \text{pour} \quad x > 0. \end{cases}$$

(a) Montrer que f est continue sur $[0, \infty[$ et calculer $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

(b) Montrer que f est dérivable sur $]0, \infty[$. Calculer $f'(x)$ et $\lim_{x\downarrow 0} f'(x)$.

(c) Déterminer les zéros de f et de f'. Etablir le tableau de variation de f.

(d) Montrer que f admet un minimum absolu $m = \min_{x\in[0,\infty[} f(x)$. Calculer m et l'ensemble des point $u \in [0, \infty[$ tels que $f(u) = m$.

(e) Tracer la courbe représentative du graphe de f et discuter ses asymptotes.

Exercice 4. (5 points) Toutes les questions de cet exercice sont indépendantes. Tous les calculs doivent être justifiés et détaillés. On rappelle qu'une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \to (1+x^2)^{-1}$ est $x \to \operatorname{Arctg}(x)$, que $1/\sqrt{101}$ a pour valeur approchée par défaut $0,099$ et que $\operatorname{Arctg}(1/3)$ a pour valeur approchée par excès $0,322$.

(a) Sur quels intervalles de $\mathbb{R}$ la fonction $x \to (x(x^2+1)^2)^{-1}$ admet-elle des primitives. En calculer une.

(b) Expliquer pourquoi l'intégrale suivante est définie, puis la calculer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\operatorname{tg}(x)^2 dx$$

(c) Pour quelle raison l'intégrale suivante existe :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^2+1}}\ ?$$

Donner un encadrement de sa valeur au $100^{\text{ème}}$ près.

(Session 2 – 1998)

UNIVERSITE du SUD TOULON - VAR

Faculté des Sciences et Techniques

Licence 1ére année

Module M11

Avertissement. La qualité des explications sera prise en compte dans la notation. Aucun document ni calculette ne sont autorisés.

Exercice 1. (6 points) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) \equiv x \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1}$.

(1) Quel est le domaine de définition de f ?

(2) Calculer la dérivée de f et en déduire le sens de variation de f.

(3) Etudier le signe de la dérivée seconde de f. Quelle propriété de f peut-on en déduire ?

(4) Montrer que pour tout $t > 0$

$$\operatorname{arctg} t + \operatorname{arctg} \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}.$$

En déduire les coefficients a_0 et a_1 tels que

$$\operatorname{arctg} t = a_0 + \frac{a_1}{t} + \frac{1}{t}\varepsilon(t),$$

pour $t > 0$, avec $\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = 0$.

(5) Montrer à partir du résultat précédent que le graphe de f admet une asymptote à $+\infty$ dont on donnera l'équation.

(6) Donner l'allure du graphe de f.

Exercice 2. (5 points) Pour a réel et strictement positif on considère la fonction $f_a : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f_a(x) \equiv \exp(-a\sqrt{x})$.

(1) Montrer que f_a admet une primitive sur $[0, \infty[$.

(2) Soit F_a la primitive de f_a telle que $F_a(0) = 0$. Montrer que

$$F_a(x) = \frac{1}{a^2} F_1(a^2 x),$$

pour $x \geqslant 0$.

(3) Calculer $F_1(x)$ en effectuant d'abord le changement de variable $x = y^2$, puis une intégration par parties.

(4) Montrer que

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x f_a(t)dt$$

existe et calculer sa valeur.

(5) Montrer que f_a possède une primitive G_a telle que $\lim_{x\to\infty} G_a(x) = 0$.

Exercice 3. (9 points) Soit P le polynôme $P(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x + a$, où a est un paramètre réel.

(1) Démontrer que P a toujours au moins une racine réelle pour toute valeur de a.

(2) (a) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles P admet une racine double[1].

(b) Achever la décomposition de P sur $\mathbb{R}$ dans ces cas.

(3) Soient $I \equiv [b, c]$, $b < c$, un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$, $f : I \to I$ une application continue strictement décroissante et $u : \mathbb{N} \to I$ la suite réelle définie par : $u_0 \equiv b$ et $u_{n+1} \equiv f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Démontrer qu'il existe un et un seul point $x^\star$ appartenant à I tel que $f(x^\star) = x^\star$. On utilisera l'hypothèse de la décroissance de f.

(b) Démontrer que les deux sous-suites $\{u_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{u_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement croissante et décroissante. En déduire qu'elles sont convergentes. Vérifier que $u_{2n} \leqslant u_{2m+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$. On pourra utiliser la fonction auxiliaire $g \equiv f \circ f$.

(c) On suppose maintenant que f est dérivable sur I et que

$$K \equiv \sup_{x\in I} |f'(x)| < 1.$$

Démontrer que $\{u_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{u_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes (on pourra utiliser la formule des accroissements finis). Conclure que $\lim_n u_n = x^\star$.

(d) Soient $a \equiv -2$, $I \equiv [1, \frac{3}{2}]$ et $f : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) \equiv x - \frac{P(x)}{16x^4}.$$

Etablir que les équations $P(x) = 0$ et $f(x) = x$ sont équivalentes sur I. Expliquer comment utiliser l'étude faite en (b) et (c) pour trouver une valeur approchée de la racine de P.

(Session 1 – 1999)

[1]On pourra utiliser la formule :

$$\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}\right)^2 = \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{8}\right).$$

Faculté des Sciences et Techniques

UNIVERSITE DU SUD TOULON - VAR

Licence 1ére année

Module M11

Avertissement. La qualité des explications sera prise en compte dans la notation. Aucun document ni calculette ne sont autorisés.

Exercice 1. (7 points) Soit P le polynôme $P(X) := 2X^3 - 9X^2 + 12X + b$ où b est un nombre réel donné.

(a) Déterminer pour quelle valeur de b le polynôme P admet une racine double.

(b) Montrer que si P admet une racine double $X_1(b)$ il admet nécessairement une autre racine réelle $X_2(b)$. Calculer $X_2(b)$ pour les valeurs de b trouvées dans la question (a).

(c) Former le tableau de variation de la fonction $x \to P(x)$ pour les valeurs de b trouvées dans la question (a).

(d) Montrer que, quelle que soit la valeur de b, l'équation $P(x) = x$ admet toujours au moins une solution réelle.

Exercice 2. (3 points) On considère l'expression suivante, dans laquelle A et B sont des paramètres réels :

$$f(n) = An + B.$$

(a) Déterminer toutes les valeurs de A et B pour lesquelles cette expression définit une application :

$$f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}.$$

(b) Pour quelles valeurs de A et B l'application $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ est-elle injective ?

(c) Pour quelles valeurs de A et B l'application $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ est-elle surjective ?

(d) Pour quelles valeurs de A et B l'application $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ est-elle bijective ? Déterminer dans ces cas l'application réciproque f^{-1}.

Exercice 3. (5 points) Soit $f\colon [0, \infty[\to \mathbb{R}$, la fonction définie par l'expression suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad x = 0, \\ x \ln x & \text{pour} \quad x > 0. \end{cases}$$

(a) Montrer que f est continue sur $[0, \infty[$ et calculer $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

(b) Montrer que f est dérivable sur $]0, \infty[$. Calculer $f'(x)$ et $\lim_{x\downarrow 0} f'(x)$.

(c) Déterminer les zéros de f et de f'. Etablir le tableau de variation de f.

(d) Montrer que f admet un minimum absolu $m = \min_{x\in[0,\infty[} f(x)$. Calculer m et l'ensemble des point $u \in [0, \infty[$ tels que $f(u) = m$.

(e) Tracer la courbe représentative du graphe de f et discuter ses asymptotes.

Exercice 4. (5 points) Toutes les questions de cet exercice sont indépendantes. Tous les calculs doivent être justifiés et détaillés. On rappelle qu'une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \to (1+x^2)^{-1}$ est $x \to \operatorname{Arctg}(x)$, que $1/\sqrt{101}$ a pour valeur approchée par défaut $0,099$ et que $\operatorname{Arctg}(1/3)$ a pour valeur approchée par excès $0,322$.

(a) Sur quels intervalles de $\mathbb{R}$ la fonction $x \to (x(x^2+1)^2)^{-1}$ admet-elle des primitives. En calculer une.

(b) Expliquer pourquoi l'intégrale suivante est définie, puis la calculer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\operatorname{tg}(x)^2 dx$$

(c) Pour quelle raison l'intégrale suivante existe :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^2+1}}\ ?$$

Donner un encadrement de sa valeur au $100^{\text{ème}}$ près.

(Session 2 – 1999)