Université de Toulon et du Var
Département de Mathématiques

Géométrie Différentielle :

Master 1 de Mathématiques 2008/2009

Contrôle continu de novembre 2008

Les documents et les calculettes ne sont pas autorisés. Le barème est donné à titre indicatif.

Question 1 (7 points) Soit c l'arc parametré

$$c(t) := ((1 - cost)\cos t, (1 - cost)\sin t) \qquad (t \in [0, \frac{3\pi}{4}])$$

et f le champ:

$$f(x, y) := (xy\cos x + y\sin x, x\sin x).$$

Tracer c et déterminer la valeur de $\int_c \langle f, ds\rangle$, l'integrale de f lelong c.

Question 2 (6 points) Soit $X \in C^2(U, \mathbb{R}^2)$ un difféomorphisme, tel que pour $a, b \in C^1(U, \mathbb{R})$: $\partial_1 X_1 = a = \partial_2 X_2$, $\partial_1 X_2 = b = -\partial_2 X_1$. Démontrer que le système de coordonnées curvilignes définie par X est conforme, c'est a dire : $g_{ij} = f\delta_{ij}$ avec $f \in C^1$. Déterminer f en fonction de a, b.

On rappelle que pour base naturelle $\{e_1, e_2\}$:

$$\partial_k e_i =: \Gamma^j_{ki} e_j$$
$$\Gamma^j_{ki} = g^{jl}\langle e_l, \partial_k e_i\rangle =: g^{jl}\Gamma_{kli} = g^{jl}\frac{1}{2}\left(\partial_k g_{li} + \partial_i g_{kl} - \partial_l g_{ik}\right)$$

et pour $Y = Y^i e_i$ un champ de vecteurs, $c(t) = X(u(t)) \quad (t \in [0, 1])$ une courbe paramétrée:

$$Y^i_{;j} := \partial_j Y^i + \Gamma^i_{jm} Y^m, \quad \frac{DY}{Dt} := DY(\dot{c}) = \left(Y^i_{;j}\ \dot{u}^j\right) e_i$$

Déterminer les symboles de Christoffel en fonction de f et de ses dérivées. Ecrire l'equation $\ddot{c}(t) = 0$ en ces coordonnées.

Pour les cas $X(u, v) = (e^u \cos v, e^u \sin v)$ démontrer que les courbes $t \mapsto (u(t), v(t)) := (\log t, \frac{\pi}{2})$ sont solutions de ces équations.

Question 3 (7 points) Calculer le volume de la région bornée par les courbes $u \mapsto (\frac{1}{2}(u^2 - 1), u)$ et $v \mapsto (\frac{1}{2}(1 - v^2), v)$.

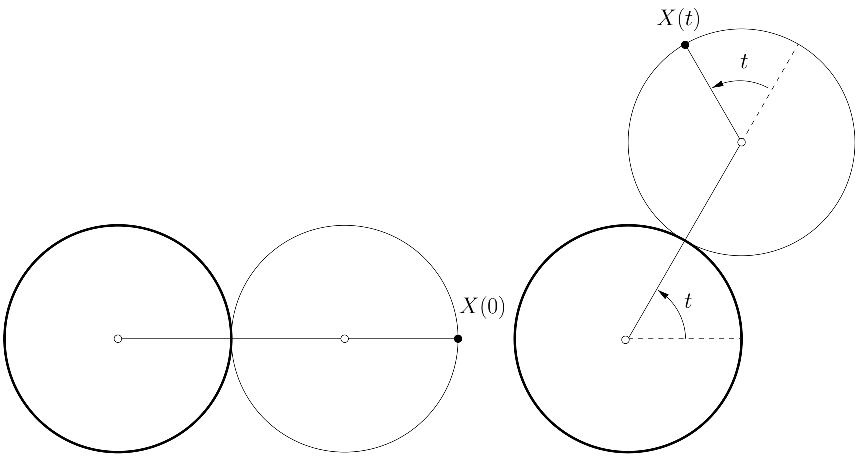
Faculté des Sciences et Techniques

Master de Mathématiques 1ére année

Géométrie Différentielle

Durée de l'examen : 180 minutes.
Documents autorisés : aucun.
Barème : les points attribués à chaque problème sont notés en marge.
Toutes les réponses doivent être justifiées.

Problème 1. La cardioïde est la courbe décrite par un point d'un cercle roulant sans glisser sur un autre cercle de même rayon. (Voir la figure ci-dessous).



(a) Montrer que

$$[0,2\pi] \ni t \mapsto X(t) = (2\cos(t)+\cos(2t), 2\sin(t)+\sin(2t)) \in \mathbb{R}^2,$$

est le paramétrage de la cardioïde suggéré dans la figure en supposant les deux cercles de rayon 1. [2]

(b) Calculer le vecteur vitesse $\dot{X}(t)$ et montrer qu'il s'annule en $t=\pi$. [1]

(c) Dessiner la cardioïde. Est-elle régulière ? (Argumenter !) [2]

(c) Calculer le périmètre de la cardioïde ainsi que l'aire de la région qu'elle délimite. [2]

(d) Que valent ce périmètre et cette aire lorsque les deux cercles sont de rayon r ? [1]

Problème 2. En utilisant la formule de Gauss-Bonnet locale, démontrer que la somme des angles internes d'un polygone plan euclidien à n côtés vaut $(n-2)\pi$. [2]

Problème 3. Une surface est minimale si sa courbure moyenne est nulle. On considère la surface de révolution

$$\mathbb{R} \times [0,2\pi] \ni (u,v) \mapsto (\mathrm{ch}(v)\cos(u), \mathrm{ch}(v)\sin(u), v) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Calculer ses deux formes fondamentales. [2]

(b) Montrer que c'est une surface minimale. [2]

(c) Calculer sa courbure de Gauss. [1]

(d) Montrer que la courbure de Gauss d'une surface minimale ne peut pas être positive. [2]

Question 4. Donner deux caractérisations d'une courbe géodésique sur une surface. [3]

(Session 1 – 2008)

UNIVERSITÉ DE TOULON
Faculté des Sciences et Techniques

Master 1ére année

Géométrie Différentielle

Durée de l'examen : 2 heures.
Documents autorisés : aide mémoire (1 feuille A4 double), pas de calculette.
Barème : à titre indicatif, les points attribués à chaque problème sont notés en marge.

Problème 1. On définit $T := \frac{\pi}{2}$, $r(\varphi) := \sin(2\varphi)$ et on considère la courbe plane

$$[0,T] \ni t \mapsto c(t) = (r(t)\cos t, r(t)\sin t).$$

1. Démontrez que c est une courbe régulière et que $c(T) = c(0)$.
2. Tracez c. Soyez particulièrement soigneux près de l'origine $(0,0)$.
3. Démontrez que la courbure de c est donnée par
$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{2}(3\cos(4t)+13)}{(3\cos(4t)+5)^{3/2}}$$
4. Dans la suite, admettez que le vecteur tangent normalisé et la dérivée de la courbure sont donnés par
$$\frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} = \left(\frac{\cos(t)+3\cos(3t)}{\sqrt{6\cos(4t)+10}}, \frac{3\sin(3t)-\sin(t)}{\sqrt{6\cos(4t)+10}}\right),$$
$$\dot{\kappa}(t) = \frac{6\sqrt{2}\sin(4t)(3\cos(4t)+29)}{(3\cos(4t)+5)^{5/2}}.$$
Montrez que la courbe c est convexe.
5. Soit $\tilde{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ le prolongement continu de c défini par
$$\tilde{c}(t) := c(t - nT) \quad \text{pour } t \in [nT, (n+1)T[\text{ et } n \in \mathbb{Z}.$$
Cette fonction est donc périodique, de période T. La courbe définie par $\tilde{c}$ est-elle régulière ?
6. Déterminez le nombre de sommets de c.
7. Déterminez la valeur de $\frac{1}{2\pi}\int_c \kappa ds := \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \kappa(t)\|\dot{c}(t)\|\, dt$. Evitez un calcul explicite long et fastidieux; argumentez en faisant appel à l'interpretation géométrique de l'intégrale comme "nombre de rotations" de $\frac{\dot{c}}{\|\dot{c}\|}$.
8. Enoncez le théorème des quatre sommets.
9. Enoncez le théorème du nombre de rotations (Hopf).
10. Expliquez pourquoi les résultats trouvés dans les points 6 et 7 ne sont pas en contradiction avec ces deux théorèmes.

Problème 2. Pour $r \in C^\infty(]a,b[,]0,\infty[)$ on considère la surface de révolution définie par
$$S := \left\{\mathbb{R}^3 \ni (x,y,z) = (r(t)\cos\varphi, r(t)\sin\varphi, t) \,|\, t \in]a,b[, \varphi \in [0,2\pi]\right\}$$
Nous rappelons que deux cartes de la forme
$$]a,b[\times]\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi[\ni (t,\varphi) \mapsto F(t,\varphi) := (r(t)\cos\varphi, r(t)\sin\varphi, t)),$$
avec différents φ_0 recouvrent S.

1. Vérifiez que pour le choix de la normale vers l'extérieur les deux formes fondamentales de S sont données par

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1+\dot{r}^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad (L_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{1+\dot{r}^2}} \begin{pmatrix} \ddot{r} & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix}$$

2. Déterminez la courbure de Gauss $K(t, \varphi)$ et la courbure moyenne $H(t, \varphi)$.
3. En déduire une équation différentielle pour r équivalente à la condition "S est une surface minimale".
4. Démontrez que pour $c_1 > 0, c_2 \in \mathbb{R}$ la fonction $r(t) := c_1 \cosh\left(\frac{t+c_2}{c_1}\right)$ est solution de cette équation.
5. Démontrez que toute surface de révolution de cette classe qui est minimale est définie par un r de la forme 4.
6. Tracer S dans les cas $r(t) := \cosh(t),$ et $r(t) = 2\cosh\left(\frac{t}{2}\right) \quad (t \in [-1, 1]).$

(CAP - 4/12/13)

UNIVERSITÉ DE TOULON
Faculté des Sciences et Techniques

Master 1ére année

Géométrie Différentielle

Durée de l'examen : 2 heures.
Documents autorisés : aucun.
Barème : à titre indicatif, les points attribués à chaque problème sont notés en marge.

Problème 1.

Problème 2. On considère l'hyperboloïde à une nappe S défini par

$$\mathbb{R} \times [0, 2\pi[\ni (u, v) \mapsto X(u, v) = (\cosh(u)\cos(v), \cosh(u)\sin(v), \sinh(u)) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Calculer les 2 formes fondamentales de S.
(b) Calculer la courbure moyenne et la courbure de Gauss de S.
(c) Pour $u \in \mathbb{R}$, on considère le cercle $C_u \subset S$ défini par $v \mapsto X(u, v)$. Calculer la courbure normale et la courbure géodésique de C_u. Pour quelles valeurs de u le cercle C_u est-il géodésique ?
(d) Montrer que par chaque point de S passent 2 droites entièrement contenues dans S et en déterminer les équations. Lesquelles de ces droites sont des géodésiques ?
(e) Montrer que si $s \mapsto X(u(s), v(s))$ est une géodésique paramétrée par la longueur d'arc, alors $\ell = \dot{v}(s)\cosh u(s)$ est constant et $\dot{u}(s)^2 \cosh(2u(s)) + \dot{v}(s)^2 \cosh^2(u(s)) = 1$.

(CAP - 13/12/16)

Faculté des Sciences et Techniques

Master 1ére année

Géométrie Différentielle

Durée de l'examen : 2 heures.
Documents autorisés : aide mémoire (1 feuille A4 double), pas de calculette.
Barème : à titre indicatif, les points attribués à chaque problème sont notés en marge.

Problème 1.

Problème 2. On considère la surface de révolution S définie par

$$[0, 2\pi[\times\mathbb{R} \ni (u, v) \mapsto X(u, v) = (\cosh(v)\cos(u), \cosh(v)\sin(u), v) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Calculer les 2 formes fondamentales de S.
(b) Montrer que S est une surface minimale.
(c) Calculer la courbure de Gauss de S.
(d) Pour $v \in \mathbb{R}$, on considère le cercle $C_v \subset S$ défini par $u \mapsto X(u, v)$. Calculer la courbure normale et la courbure géodésique de C_v.
(e) Pour quelles valeurs de v le cercle C_v est-il géodésique ?

(CAP - 4/12/13)