Documents autorisés : aucun.
Barème : les points attribués à chaque question sont notés en marge.
Toutes les réponses doivent être justifiées.

Problème 1. Soit f la fonction définie par l'expression

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{pour} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pour} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(x,y) \neq (0,0)$. [1]

(b) Déterminer l'expression de f en coordonnées polaires. [1]

(c) f est-elle continue en $(x,y) = (0,0)$? [1]

(d) Les dérivées partielles de f existent-elles en $(x,y) = (0,0)$? [2]

(e) Déterminer l'ensemble des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ où f est différentiable. [2]

Problème 2. On considère la fonction $s : [0,\infty[= \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$s(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ -x\log x & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

(a) Montrer que $0 \leqslant s(x) \leqslant e^{-1}$ pour tout $x \in [0,1]$ et que $s(x) < 0$ pour $x > 1$. [1]

On définit la fonction $S : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ par

$$S(x_1,\dots,x_n) = \sum_{k=1}^{n} s(x_k).$$

(b) Déterminer les points critiques de S. [1]

(c) Déterminer les extrema locaux de S et leur nature. [1]

(d) On pose $P = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{k=1}^n x_k = 1\}$. Calculer $\max_{x\in P} S(x)$. [3]

Problème 3. Etude de l'équation de Kepler $\psi = \varphi - \epsilon \sin\varphi$.

(a) Montrer que si $\epsilon \in [0,1[$, la fonction $\varphi \mapsto \varphi - \epsilon\sin\varphi$ est strictement croissante. En déduire que l'équation de Kepler définit implicitement une fonction

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}\times[0,1[& \to & \mathbb{R} \\ (\psi,\epsilon) & \mapsto & \varphi(\psi,\epsilon) \end{array}$$

unique solution de cette équation et que pour $\epsilon \in [0,1[$ la fonction $\psi \mapsto \varphi(\psi,\epsilon)$ est strictement croissante. [2]

(b) Calculer $\varphi(\psi,0)$ et $\varphi(n\pi,\epsilon)$ pour $n \in \mathbb{Z}$. [1]

(c) Montrer que $\varphi(\psi+2\pi,\epsilon) = \varphi(\psi,\epsilon)+2\pi$ pour tout $(\psi,\epsilon) \in \mathbb{R}\times[0,1[$. [1]

(d) Montrer que pour tout $(\psi, \epsilon) \in \mathbb{R} \times [0, 1[$ on a $|\varphi(\psi, \epsilon) - \psi| \leqslant \epsilon$. [1]

(e) Montrer que la fonction $\varphi(\psi, \epsilon)$ est différentiable et que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \psi}(\psi, \epsilon) = \frac{1}{1 - \epsilon \cos \varphi(\psi, \epsilon)}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon}(\psi, \epsilon) = \frac{\sin \varphi(\psi, \epsilon)}{1 - \epsilon \cos \varphi(\psi, \epsilon)}.$$

[2]

(Partiel – 2012/2013)

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES

UNIVERSITE DU SUD TOULON - VAR

Licence 3ème année

M62

Documents autorisés : aucun.
Barème : les points attribués à chaque question sont notés en marge.
Toutes les réponses doivent être justifiées.

Problème 1. Soit f la fonction définie par l'expression

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{pour} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pour} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) f est-elle continue en $(x,y) = (0,0)$? [1]

(b) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ ainsi que la matrice Hessienne de f en $(x,y) = (0,0)$. [4]

(c) f est elle continûment différentiable sur $\mathbb{R}^2$. [2]

Problème 2. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

(a) Déterminer tous ses points critiques. [2]

(b) Déterminer la nature de ces points critiques. [3]

(c) Calculer $A = \min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$ et $B = \max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$. [2]

Problème 3. (a) Déterminer deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle

$$y'' - xy' + 2y = 0,$$

sous la forme de séries de puissances de x. [4]

(b) Quels sont les rayons de convergence des séries ainsi obtenues ? [2]

(Final – 2012/2013 –Session 1)

UNIVERSITE du SUD TOULON - VAR

Faculté des Sciences et Techniques

Licence 3ème année

M62

Documents autorisés : aucun.
Barème : les points attribués à chaque question sont notés en marge.
Toutes les réponses doivent être justifiées.

Problème 1. Soit f la fonction définie par l'expression

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{pour} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pour} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Montrer que f est continue en $(x,y) = (0,0)$ [1]

(b) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ ainsi que la matrice Hessienne de f en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, y-compris en $(x,y) = (0,0)$. [3]

(c) Montrer que f est continûment différentiable sur $\mathbb{R}^2$. [2]

(d) Montrer que f n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. [2]

Problème 2. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = e^{-(x-y)} + x + y - 1.$$

(a) Montrer qu'il existe un voisinage $0 \in I \subset \mathbb{R}$ et une fonction différentiable $g : I \to \mathbb{R}$ telle que $g(0) = 0$ et $f(x, g(x)) = 0$. [2]

(b) Calculer $g'(0)$ et $g''(0)$. [2]

(c) Montrer que $g : I \to \mathbb{R}$ est concave et en déduire qu'elle est décroissante pour $x > 0$. [2]

Problème 3. On considère l'équation différentielle

$$y' - y^2 + \frac{2}{x^2} = 0. \tag{1}$$

(a) Vérifer que la fonction $y_0(x) = x^{-1}$ en est une solution. [1]

(b) Montrer que $y(x) = y_0(x) + \frac{1}{z(x)}$ est une solution de (1) si et seulement si la fonction $z(x)$ satisfait l'équation linéaire inhomogène [1]

$$z'(x) + 2\frac{z(x)}{x} = -1. \tag{2}$$

(c) Déterminer la solution générale de l'équation (2). [2]

(d) En déduire la solution générale de l'équation (1). [2]

(Final – 2012/2013 –Session 2)